Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης

Γιώργος Σακελλάρης

Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Εαρινό Εξάμηνο 2023-2024

Περιεχόμενα

1 Χώροι Banach

1.1 Εισαγωγή

Έστω X ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ (σε κάποιες περιπτώσεις και πάνω από το $\mathbb{C}$). Μία απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ ονομάζεται *νόρμα,* αν ισχύουν οι εξής ιδιότητες.

i) (Νόρμα του 0) Αν $x \in X$, τότε $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.

ii) (Ομογένεια) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in X$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

iii) (Τριγωνική ανισότητα) Για κάθε $x, y \in X$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Κάθε χώρος με νόρμα είναι μετρικός χώρος, με τη μετρική $d(x, y) = \|x-y\|$. Έτσι, μπορούμε να μιλήσουμε για όλες τις τοπολογικές ιδιότητες ενός χώρου με νόρμα, οι οποίες θα συνδέονται με τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα.

Ορισμός 1.1. Ένας πλήρης γραμμικός χώρος με νόρμα ονομάζεται *χώρος Banach*.

Παράδειγμα 1.2. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές. Ορίζουμε $C(K)$ τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{R}$, και θέτουμε

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in K\}.$$

Η προηγούμενη απεικόνιση είναι νόρμα στον $C(K)$, η οποία ορίζει την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης, και ο $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.

Παράδειγμα 1.3. Κλασσικό παράδειγμα χώρων Banach είναι οι χώροι ακολουθιών ℓ^p για $p \in [1, \infty]$:

$$\ell^p = \{(x_n)_{n=1}^\infty : \|x\|_p < \infty\},$$

όπου

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{1/p} \quad \text{για } p \in [1, \infty), \quad \|x\|_\infty = \sup |x_n|.$$

Το ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα προκύπτει από τις ανισότητες Hölder και Minkowski.

Παράδειγμα 1.4. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, όπου το μ είναι θετικό μέτρο, και θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{M}(\Omega)$ των μετρήσιμων συναρτήσεων στο Ω. Αν $p \in [1, \infty)$, θεωρούμε τον χώρο συναρτήσεων

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f \in \mathcal{M}(\Omega) : \|f\|_p < \infty\},$$

όπου

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \quad \text{για } p \in [1, \infty),$$

και το ολοκλήρωμα θεωρείται ως προς το μέτρο μ.

Η $\|f\|_p$ δεν είναι νόρμα στον $\mathcal{L}^p(\Omega)$, αφού για οποιαδήποτε $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ με $f = 0$ μ-σχεδόν παντού στο Ω, ισχύει ότι $\|f\|_p = 0$. Για να "διορθώσουμε" αυτό το γεγονός, ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας στον $\mathcal{L}^p(\Omega)$, ορίζοντας

$$f \sim g, \text{ αν} f = g, \ \mu - \text{σ.π. στο } \Omega.$$

Ορίζουμε τότε τόν χώρο $L^p(\Omega)$ ως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]$, ο οποίος είναι γραμμικός χώρος με τις πράξεις

$$[f+g] = [f] + [g], \ [\lambda f] = \lambda[f].$$

Καταχρώντας τον συμβολισμό, συνεχίζουμε να χρησιμοποιούμε το συμβολο f για να δηλώσουμε την κλάση $[f]$. Τότε, η

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

είναι νόρμα στον $L^p(\Omega)$, από τις αντίστοιχες ανισότητες Hölder και Minkowski.

Για $p = \infty$ και $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, ορίζουμε

$$\|f\|_\infty = \inf\{t > 0 : \mu\left(\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}\right) = 0\}.$$

Το προηγούμενο inf είναι τελικά min (αν είναι πεπερασμένο), δηλαδή το $\|f\|_\infty$ είναι ο μικρότερος αριθμός για τον οποίο το μέτρο του συνόλου $\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}$ είναι ίσο με 0. Ταυτίζοντας ξανά δύο συναρτήσεις αν είναι ίσες σχεδόν παντού, η $\|f\|_\infty$ είναι νόρμα στον χώρο

$$L^\infty(\Omega) = \{f \in \mathcal{M}(\Omega) : \|f\|_\infty < \infty\},$$

και ο $L^\infty(\Omega)$ με την προηγούμενη νόρμα είναι χώρος Banach.

Τους προηγούμενους χώρους θα τους θεωρούμε συνήθως όταν το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$ είναι τα Borel υποσύνολα του Ω, και το μ είναι το μέτρο Lebesgue. Σε αυτή την περίπτωση, οι χώροι $L^p(\Omega)$ είναι διαχωρίσιμοι αν $p \in [1, \infty)$, αλλά ο $L^\infty(\Omega)$ δεν είναι διαχωρίσιμος, αν πχ το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό.

Στην περιπτωση που $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ και $\mu(A)$ είναι το πλήθος των στοιχείων του A, τότε αν $x = (x_n)$, ισχύει ότι

$$\left(\int_\mathbb{N} |x|^p \right)^{1/p} = \left(\int_\mathbb{N} |x_n|^p \, d\mu(n) \right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{1/p},$$

οπότε ο ℓ^p είναι στην ουσία ο $L^p(\mathbb{N})$.

Παράδειγμα 1.5. Έστω Ω ένα σύνολο, και $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ μία σ άλγεβρα. Μία απεικόνιση $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ είναι ένα προσημασμένο μέτρο, αν για κάθε $(A_i)_{i=1}^n \subseteq\in \mathcal{A}$ με $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$, ισχύει ότι

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i \right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i).$$

Στην προηγούμενη ισότητα, υπονοείται ότι η σειρά στα δεξιά συγκλίνει. Παρατηρήστε επίσης ότι, εξ' ορισμού το μ παίρνει μόνο πεπερασμένες τιμές (μιλάμε δηλαδή για πεπερασμένα μέτρα).

Η μελέτη προσημασμένων μέτρων σχετίζεται με τα θετικά μέτρα μέσω του Θεωρήματος του Hahn.

Θεώρημα 1.6 (Hahn decomposition theorem)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένος χώρος προσημασμένου μέτρου. Τότε υπάρχουν $P, N \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε:*

i) *$P \cap N = \emptyset$, και $P \cup N = X$.*

ii) *Αν $A \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq P$, τότε $\mu(A) \geq 0$.*

iii) Αν $B \in \mathcal{A}$ με $B \subseteq N$, τότε $\mu(B) \leq 0$.

Οι προηγούμενες ιδιότητες χαρακτηρίζουν τα P, N, έως μέτρου "αυστηρά" 0 (δηλαδή, όχι μόνο το σύνολο, αλλά και όλα τα μετρήσιμα υποσύνολά του έχουν μέτρο 0). Τότε, ορίζουμε τα θετικά μέτρα

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap P), \quad \mu^-(E) = -\mu(E \cap N),$$

για $E \in \mathcal{A}$.

Ο χώρος των προσημασμένων μέτρων είναι γραμμικός χώρος με τον προφανή τρόπο. Για να ορίσουμε μία νόρμα, θέτουμε

$$|\mu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A).$$

Το $|\mu|$ είναι ένα πεπερασμένο θετικό μέτρο στο $(\Omega, \mathcal{A})$, και η απεικόνιση $\mu \mapsto |\mu|(\Omega)$ είναι νόρμα στον χώρο των προσημασμένων μέτρων. Τέλος, ο χώρος των προσημασμένων μέτρων με την προηγούμενη νόρμα είναι χώρος Banach.

Παράδειγμα 1.7. Έστω $D \subseteq \mathbb{C}$ ο μοναδιαίος δίσκος στο $\mathbb{C}$, και $p \in [1, \infty)$. Ορίζουμε τον χώρο του Bergman

$$A^p(D) = \{f : D \to \mathbb{C} : f \text{ ολόμορφη}, \ \|f\|_{A^p(D)} < \infty\},$$

όπου

$$\|f\|_{A^p(D)} = \left(\int_D |f(x+yi)|^p \, dxdy \right)^{1/p}.$$

Ο $A^p(D)$ είναι χώρος Banach, με νόρμα $\|f\|_{A^p(D)}$.

Παράδειγμα 1.8. Κάποιοι χώροι με νόρμα οι οποίοι δεν είναι χώροι Banach είναι πχ ο χώρος των *τελικά μηδενικών ακολουθιών*

$$c_{00} = \{(x_n)_{n=1}^\infty : \exists n_0 \in \mathbb{N}, x_n = 0 \ \forall n \geq n_0\},$$

με οποιαδήποτε από τις $\| \cdot \|_p$ νόρμες, και ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{R}$ με οποιαδήποτε από τις L^p νόρμες, όπου $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές.

Αφού στους γραμμικούς χώρους ορίζονται αθροίσματα και υπάρχει τοπολογία, μπορούμε να ορίσουμε σύγκλιση σειρών: αν X χώρος με νόρμα και (x_n) ακολουθία στον X, λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty x_n$ συγκλίνει, αν υπάρχει $x \in X$ με

$$\sum_{k=1}^n x_k \xrightarrow[n \to \infty]{} x.$$

Επίσης, λέμε ότι η προηγούμενη σειρά συγκλίνει απολύτως, αν η σειρά των νορμών των x_n συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, ή ισοδύναμα

$$\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty.$$

Πρόταση 1.9. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε ο X είναι χώρος Banach, αν και μόνο αν ισχύει το εξής: αν μία σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.*

1.2 Γραμμικοί τελεστές

Έστω X, Y χώροι με νόρμα. Ο συνδυασμός της γραμμικής και της τοπολογική δομής των X, Y μας οδηγεί στον εξής ορισμό: μία απεικόνιση $T : X \to Y$ ονομάζεται φραγμένος γραμμικός τελεστής, αν η T είναι γραμμική και συνεχής απεικόνιση. Η ορολογία αιτιολογείται από την εξής πρόταση.

Πρόταση 1.10. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Τότε, τα εξής είναι ισοδύναμα:*

i) Ο $T : X \to Y$ είναι συνεχής.

ii) Ο $T : X \to Y$ είναι συνεχής στο 0.

iii) Υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in X$, $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$.

Ο χώρος των φραγμένων γραμμικών τελεστών συμβολίζεται με $B(X, Y)$.

Ο αριθμός C που εμφανίζεται στην προηγούμενη πρόταση κωδικοποιεί το πόσο "μεγάλος" είναι ένας τελεστής: θέτουμε

$$\|T\| = \inf\{C > 0 : \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \text{ για κάθε } x \in X\}.$$

Είναι απλό να δείξουμε το εξής: για κάθε $T \in B(X, Y)$,

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\} = \sup\{\|Tx\|_Y : x \in X, \|x\|_X = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X, x \neq 0\right\}.\end{aligned}$$

Με τα παραπάνω, μπορούμε επίσης να αποδείξουμε ότι η $\|T\|$ είναι νόρμα στον $B(X, Y)$.

Πρόταση 1.11. *Έστω X χωρος με νόρμα, και Y χώρος Banach. Τότε ο $(B(X, Y), \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.*

Παρατήρηση 1.12. Η υπόθεση ότι ο Y είναι Banach είναι απαραίτητη: για παράδειγμα, αν ορίσουμε $T_n : (\mathbb{R}, \|\cdot\|_2) \to (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ με

$$T_n x = \left(x, \frac{x}{2}, \ldots, \frac{x}{n}, 0, 0, 0, \ldots\right),$$

τότε η (T_n) είναι Cauchy στον $B(\mathbb{R}, c_{00})$, αλλά δεν συγκλίνει.

Η πιο απλή περίπτωση φραγμένων γραμμικών τελεστών είναι όταν $Y = \mathbb{R}$. Α $f : X \to \mathbb{R}$ είναι ένας γραμμικός τελεστής, λέμε ότι το f είναι ένα γραμμικό *συναρτησοειδές*. Ο χώρος των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $B(X, \mathbb{R})$ συμβολίζεται με X^*, και ονομάζεται ο δϋικός χώρος του X. Ο X^* είναι πάντα μη κενός, αφού περιέχει το συναρτησοειδές $f(x) = 0$ για κάθε $x \in X$.

Με βάση τα παραπάνω, ο $(X^*, \|\cdot\|)$ είναι πάντα χώρος Banach, επομένως ορίζεται ο δϋικός του, ο οποίος ονομάζεται ο δεύτερος δϋικός του X, και συμβολίζεται με X^{**}. Ο X εμφυτεύεται στον X^{**} μέσω της κανονικής εμφύτευσης, ως εξής: ορίζουμε $E : X \to X^{**}$, με $x \mapsto Ex \in X^{**}$, όπου

$$Ex : X^* \to \mathbb{R}, \quad Ex(f) = f(x).$$

Η E είναι γραμμικός, φραγμένος, και 1-1 τελεστής. Επίσης, είναι ισομετρία (θα το αποδείξουμε παρακάτω).

Ορισμός 1.13. Ένας χώρος με νόρμα X ονομάζεται αυτοπαθής, αν η $E : X \to X^{**}$ είναι επί.

Μέσω του ότι η $E : X \to X^{**}$ είναι ισομετρία, έπεται ότι αν ένας χώρος είναι αυτοπαθής, τότε είναι αναγκαστικά χώρος Banach.

Όταν ένας χώρος X έχει άπειρη διάσταση, τότε ο X^* είναι πάντα αυστηρά μικρότερος από τον αλγεβρικό δϋικό του X, αφού πάντα υπάρχει ένα μη φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$: για μία κατασκευή, επιλέγουμε γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ στον X, και επεκτείνουμε σε βάση του X, της μορφής

$$B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_i : i \in I\}.$$

Ορίζουμε $f : B \to \mathbb{R}$ με $f(x_n) = n\|x_n\|$ και $f(y_i) = 0$. Επεκτείνοντας γραμμικά, ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμική, για την οποία ισχύει ότι

$$\|f\| \geq \frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|} = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\|f\| = \infty$, και $f \notin X^*$.

Στην κλάση των χώρων με νόρμα, η έννοια του ισομορφισμού θα πρέπει να διατηρεί τη γραμμική δομή των χώρων, όπως και την τοπολογία τους. Έτσι, δύο χώροι με νόρμα $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ είναι ισόμορφοι, αν υπάρχει $T \in B(X, Y)$ γραμμικός, 1-1 και επί, τέτοιος ώστε ο $T^{-1} \in B(Y, X)$. Διαφορετικά, δύο χώροι ονομάζονται ισόμορφοι, αν υπάρχει $T : X \to Y$, 1-1 και επί, τέτοια ώστε να υπάρχουν $C_1, C_2 > 0$ με

$$C_1\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq C_2\|x\|_X.$$

Τότε, ο T λέγεται ισομορφισμός των X, Y. Στην περιπτωση που ο X έχει δύο διαφορετικές νόρμες, αυτές λέγονται ισοδύναμες αν η ταυτοτική απεικόνιση $i : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ είναι ισομορφισμός.

Δύο χώροι ονομάζονται ισομετρικά ισόμορφοι, αν υπάρχει ισομορφισμός όπως παραπάνω ο οποίος είναι ισομετρία, δηλαδή $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ για κάθε $x \in X$.

Όταν δύο χώροι με νόρμα ειναι ισομετρικά ισόμορφοι, τότε οι αποστάσεις, όπως η γραμμική και η τοπολογική δομή τους, ταυτίζονται μέσω του ισομετρικού ισομορφισμού. Σε αυτή την περίπτωση, θα θεωρούμε ότι οι χώροι αυτοί ταυτίζονται.

1.3 Χώροι πεπερασμένης και άπειρης διάστασης

Στους χώρους πεπερασμένης διάστασης, υπάρχει στην ουσία μόνο μία τοπολογία η οποία επάγεται από νόρμα.

Θεώρημα 1.14. *Έστω* $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ *δύο χώροι με νόρμα, με* $\dim X = \dim Y = n$. *Τότε οι* X, Y *είναι ισόμορφοι.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ με τη νόρμα $\|\cdot\|_2$, και έναν χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|_X)$, με $\dim X = n$. Έστω $(e_i)_{i=1}^n$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, και έστω $(x_i)_{i=1}^n$ μία βάση του X. Ορίζουμε τον γραμμικό τελεστή

$$T : \mathbb{R}^n \to X, \quad Te_i = x_i,$$

επεκτείνοντας τον γραμμικά σε όλο το $\mathbb{R}^n$. Τότε ο T είναι 1-1 και επί. Θέτοντας $M = \max \|Tx_i\|$, για κάθε

$z \in \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\|Tz\|_X &= \left\| T\left(\sum_{i=1}^n z_i e_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^n T(z_i e_i)\right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |z_i| \|Te_i\| \leq M\sum_{i=1}^n |z_i| \leq M\sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2\right)^{1/2} = M\sqrt{n}\|z\|_2,\end{aligned}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwartz. Επομένως ο $T : \mathbb{R}^n \to X$ είναι συνεχής.

Θεωρούμε τώρα τη μοναδιαία σφαίρα $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$, και την απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $f(z) = \|Tz\|_X$. Η f είναι συνεχής, και για κάθε $z \in S^{n-1}$, $f(z) > 0$, γιατί αν $f(z) = 0$ για κάποιο z, τότε $Tz = 0$, άρα $z = 0$ (αφού ο T είναι 1-1). Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η S^{n-1} είναι συμπαγής, άρα η f έχει μέγιστο και ελάχιστο στην S^{n-1}: υπάρχουν $C_1, C_2 > 0$ τέτοια ώστε

$$C_1 \leq \|Tz\|_X \leq C_2, \quad \forall z \in S^{n-1}.$$

Άρα, αν $w \in \mathbb{R}^n$ με $w \neq 0$, έχουμε ότι

$$C_1\|w\|_2 \leq \|Tw\|_X \leq C_2\|w\|_2,$$

άρα ο T είναι ισομορφισμός.

Αφού η σχέση ισομορφισμού είναι σχέση ισοδυναμίας, έπεται ότι δύο χώροι με νόρμα διάστασης n είναι πάντα ισόμορφοι. □

Το προηγούμενο θεώρημα μας δείχνει ότι οι τοπολογικές ιδιότητες ενός χώρου με νόρμα ταυτίζονται με τις αντίστοιχες για το $\mathbb{R}^n$. Ειδικότερα, αν ο X έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε:

i) Ο X είναι πλήρης.

ii) Κάθε γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο.

iii) Ένα υποσύνολο $K \subseteq X$ είναι συμπαγές, αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Ειδικότερα, η κλειστή μοναδιαία μπάλα ενός χώρου με πεπερασμένη διάσταση είναι συμπαγής.

Η ιδιότητα της συμπάγειας της κλειστής μοναδιαίας μπάλας χαρακτηρίζει τους χώρους πεπερασμένης διάστασης. Για να το δείξουμε αυτό, θα αποδείξουμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 1.15 (Riesz)**.** *Έστω X χώρος με νόρμα, $Y \subseteq X$ μη κενός, κλειστός, γνήσιος υπόχωρος του X. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και* $\operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.

Αν ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε υπάρχει $x \in X$ με $\operatorname{dist}(x, Y) = 1$.

Απόδειξη. Αφού $Y \neq X$, υπάρχει $z \in X \setminus Y$. Επίσης, αφού ο Y είναι κλειστός, $d(z, Y) = d > 0$. Για $\delta > 0$, υπάρχει $y \in Y$ με $\|z - y\| < (1+\delta)d$. Τότε, αν $x = \frac{z-y}{\|z-y\|}$, έχουμε ότι $\|x\| = 1$, και για κάθε $y' \in Y$,

$$\|x - y'\| = \left\|\frac{z-y}{\|z-y\|} - y'\right\| = \frac{1}{\|z-y\|}\left\|z - y - \|z-y\| - y'\right\| \geq \frac{d}{d(1+\delta)} = \frac{1}{1+\delta}.$$

Το $\delta > 0$ ήταν τυχόν, άρα έπεται το ζητούμενο.

Αν τώρα ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση, θεωρούμε $z \in X \setminus Y$, και μία ακολουθία (y_n) στο Y με $\|z - y_n\| \to \operatorname{dist}(z, y) = d$. Η (y_n) είναι φραγμένη και ο Y είναι κλειστός, άρα υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία (y_{k_n}) με $y_{k_n} \to y \in Y$. Τότε $\|z - y\| = d$, και αν $x = \frac{z-y}{\|z-y\|}$, έχουμε ότι $\|x\| = 1$ και $\operatorname{dist}(x, Y) = 1$. □

Πρόταση 1.16 (Riesz)**.** *Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Τότε υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X, με $\|x_n\| = 1$ και $\|x_n - x_m\| \geq 1$ για κάθε $n \geq m$. Επομένως, η μοναδιαία μπάλα σε έναν απειροδιάστατο χώρο δεν είναι ποτέ συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω $x_1 \in X$ με $\|x_1\| = 1$. Θέτουμε $Y = \text{span}\{x_1\}$, και τότε από το Λήμμα 1.15, υπάρχει $x_2 \in X$ με $\|x_2\| = 1$ και $\|x_2 - x_1\| \geq 1$. Θέτουμε τώρα $Y = \text{span}\{x_1, x_2\}$, και βρίσκουμε $x_3 \in X$ με $\|x_3\| = 1$ και $\text{dist}(x_3, Y) = 1$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\|x_3 - x_1\| \geq 1$ και $\|x_3 - x_2\| \geq 1$. Συνεχίζουμε επαγωγικά. □

Επομένως, βλέπουμε ότι ένας χώρος με νόρμα άπειρης διάστασης έχει "πολή μεγάλη" μοναδιαία μπάλα, με την τοπολογική έννοια. Στο ίδιο πνεύμα, αν ένας χώρος Banach είναι απειροδιάστατος, οποιαδήποτε βάση του έχει υπεραριθμήσιμο το πλήθος στοιχεία.

Πρόταση 1.17. *Έστω X χώρος Banach άπειρης διάστασης. Τότε κάθε βάση του X είναι υπεραριθμήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο X έχει αριθμήσιμη βάση $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Θέτουμε

$$X_n = \text{span}\{b_1, \dots b_n\},$$

τότε ο X_n είναι γραμμικός υπόχωρος του X με πεπερασμένη διάσταση, επομένως είναι κλειστός. Επιπλέον, αφού

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = X,$$

από το θεώρημα του Baire υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το εσωτερικό του X_{n_0} να είναι μη κενό. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι $X_{n_0} = X$, το οποίο είναι άτοπο. □

1.4 Πλήρωση, χώρος πηλίκο

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Όταν ο X δεν είναι πλήρης, μπορούμε να τον εμφυτεύσουμε ισομετρικά και πυκνά σε έναν χώρο Banach, "γεμίζοντας τα κενά" του X. Η διαδικασία είναι η εξής: θέτουμε C το σύνολο των ακολουθιών Cauchy στον X, και ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας στο C, λέγοντας ότι

$$(x_n) \sim (y_n), \quad \text{αν} \quad x_n - y_n \to 0.$$

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $[x_n]$ για $(x_n) \in C$ γίνεται γραμμικός χώρος με τον προφανή τρόπο. Ορίζουμε τότε

$$\tilde{X} = \{[x_n] : (x_n) \in C\}, \quad \|[x_n]\|_{\tilde{X}} = \lim_{n \to \infty} \|x_n\|,$$

όπου το τελευταίο όριο υπάρχει, γιατί η $(\|x_n\|)$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$. Τότε, ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

i) Ο $(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}})$ είναι χώρος Banach.

ii) Η $E : X \to \tilde{X}, x \mapsto [x_n]$, όπου $x_n = x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι ισομετρία.

iii) Ο $E(X) \subseteq \tilde{X}$ είναι πυκνός υπόχωρος του $\tilde{X}$.

Ο προηγούμενος χώρος ονομάζεται η πλήρωση του X.

Τέλος, θεωρούμε έναν χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, και έναν γραμμικό του υπόχωρο Y. Αν ο Y είναι κλειστός, τότε ο χώρος πηλίκο X/Y είναι γραμμικός χώρος, με νόρμα

$$\|[x]\|_{X/Y} = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{[x]=[y]} \|y\|.$$

Με αυτή τη νόρμα, η απεικόνιση $Q : X \to X/Y$ με $x \mapsto [x]$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, με $\|Q\| \leq 1$. Επιπλέον το λήμμα του Riesz δείχνει ότι $\|Q\| = 1$ αν $Y \neq X$.

Αν $T : X \to Y$, γραμμικός, τότε οι χώροι $X/\ker T$ και $\operatorname{im} T$ είναι ισόμορφοι, μέσω της απεικόνισης

$$\tau : X/\ker T \to \operatorname{im} T, \quad [x] \mapsto x.$$

Στο πλαίσιο των χώρων με νόρμα, αν $T \in B(X, Y)$, τότε η προηγούμενη απεικόνιση είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, με $\|\tau\| = \|T\|$.

Τέλος, τα πηλίκα διατηρούν τη δομή των χώρων Banach, ως εξής.

Πρόταση 1.18. *Έστω X χώρος Banach και Y κλειστός υπόχωρος του X. Τότε, ο $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ είναι χώρος Banach.*

2 Τα βασικά θεωρήματα

2.1 Το Θεώρημα Hahn-Banach

Έστω P ένα σύνολο. Μία σχέση $\leq$ στο P ονομάζεται μερική διάταξη, αν ισχύουν τα εξής:

i) Για κάθε $a \in P$, $a \leq a$ (ανακλααστική).

ii) Αν $a \leq b$ και $b \leq a$, τότε $a = b$ (αντισυμμετρική).

iii) Αν $a \leq b$ και $b \leq c$, τότε $a \leq c$ (μεταβατική).

Στην περίπτωση που οποιαδήποτε δύο στοιχεία του P συγκρίνονται, τότε η P είναι μία ολική διάταξη.

Αν έχουμε μία μερική διάταξη $\leq$ σε ένα σύνολο, τότε ένα υποσύνολό $C \subseteq P$ ονομάζεται αλυσίδα, αν η σχέση $\leq$ στο C είναι ολική διάταξη.

Αν $C \subseteq P$, τότε το $p \in P$ είναι άνω φράγμα του C, αν $c \leq p$ για κάθε $c \in C$. Τέλος, ένα στοιχείο $c \in C$ ονομάζεται μεγιστικό, αν δεν υπάρχει "γνησίως μεγαλύτερο" στοιχείο του c στο C, δηλαδή αν $c' \in C$ με $c \leq c'$, τότε $c = c'$.

Παράδειγμα 2.1. Ένα παράδειγμα μερικής διάταξης η οποία δεν είναι ολική διάταξη είναι η σχέση διαιρετότητας στο $\mathbb{N}$: αν $m, n \in \mathbb{N}$, τότε ορίζουμε $n \leq m$ αν $n|m$. Τότε, το σύνολο των πρώτων αριθμών $P \subseteq \mathbb{N}$ αποτελείται μόνο από μεγιστικά στοιχεία. Επίσης, το σύνολο $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι αλυσίδα στο $\mathbb{N}$, η οποία δεν έχει άνω φράγμα στο $\mathbb{N}$.

Παράδειγμα 2.2. Έστω X γραμμικός χώρος, και θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{L}$ των γραμμικά ανεξάρτητων υποσυνόλων του X. Μία μερική διάταξη στο $\mathcal{L}$ ορίζεται θέτοντας $A \leq B$ αν $A \subseteq B$.

Λήμμα 2.3 (Λήμμα του Zorn)**.** *Έστω $(P, \leq)$ ένα σύνολο με μία μερική διάταξη. Έστω ότι κάθε αλυσίδα $C \subseteq P$ έχει άνω φράγμα στο P. Τότε το P έχει μεγιστικό στοιχείο.*

Το λήμμα του Zorn είναι ισοδύναμο με το αξίωμα της επιλογής. Μία εφαρμογή του είναι το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 2.4. *Έστω X γραμμικός χώρος. Τότε ο X έχει βάση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{L}$ και τη μερική διάταξη του Παραδείγματος 2.2. Έστω $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}$ μία αλυσίδα στο $\mathcal{L}$. Θέτουμε

$$B = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \subseteq X.$$

Τότε το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο, και είναι άνω φράγμα του $\mathcal{C}$ *(γιατί;)*.

Από το λήμμα του Zorn, υπάρχει μεγιστικό στοιχείο B_0 του X. Τότε το B_0 είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και $\operatorname{span} B_0 = X$: διαφορετικά, υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε το $B' = B_0 \cup \{x_0\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και τότε $B_0 \leq B'$, ενώ $B_0 \neq B'$, άτοπο. Άρα το B_0 είναι βάση του X. □

Στρεφόμαστε τώρα στο Θεώρημα Hahn-Banach, το οποίο είναι ένα από τα πιο σημαντικά θεωρήματα στη Συναρτησιακή Ανάλυση. Το θεώρημα αυτό περιγράφει το πως ένα γραμμικό συναρτησοειδές, ορισμένο σε υπόχωρο ενός γραμμικού χώρου X και φραγμένο από πάνω από μία συγκεκριμένη συνάρτηση $p : X \to \mathbb{R}$, μπορεί να επεκταθεί με γραμμικό τρόπο, διατηρώντας το άνω φράγμα.

Η πρώτη έννοια που θα χρειαστούμε είναι ο τύπος των άνω φραγμάτων.

Ορισμός 2.5. Έστω X γραμμικός χώρος. Μία απεικόνιση $p : X \to \mathbb{R}$ ονομαζεται υπογραμμικό συναρτησοειδές, αν ισχύουν τα εξής:

i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, για κάθε $x, y \in X$.

ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, για κάθε $x \in X$ και $\lambda \geq 0$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η δεύτερη ισότητα παραπάνω πρέπει να ισχύει για κάθε $\lambda \geq 0$, και όχι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Ένα παράδειγμα υπογραμμικού συναρτησοειδούς είναι το $f = \limsup : \ell^\infty \to \mathbb{R}$.

Ένας παράλληλος ορισμός, τον οποίο θα χρειαστούμε αργότερα, είναι ο εξής.

Ορισμός 2.6. Έστω X γραμμικός χώρος. Μία απεικόνιση $q : X \to [0, \infty)$ ονομαζεται ημινόρμα, αν ισχύουν τα εξής:

i) $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$, για κάθε $x, y \in X$

ii) $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$, για κάθε $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Η μόνη διαφορά μεταξύ νορμών και ημινορμών είναι το ότι η νόρμα μηδενίζεται μόνο στο 0. Επίσης, το προηγούμενο $f = \limsup$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές, αλλά δεν είναι ημινόρμα.

Θεώρημα 2.7 (Hahn-Banach, αναλυτική μορφή)**.** *Έστω X γραμμικός χώρος, $p : X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές, $Y \subseteq X$ γραμμικός υπόχωρος του X, και $f_Y : Y \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές, τετοιο ώστε $f_Y(y) \leq p(y)$ για κάθε $y \in Y$. Τότε υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές, με $f = f_Y$ στον Y, και $f(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{S} = \left\{ (Z,h) : \begin{array}{l} Z \text{ υπόχωρος του } X, \text{ με } Y \subseteq Z, \\ h : Z \to \mathbb{R} \text{ γραμμικό συναρτησοειδές}, \\ h(y) = f_Y(y) \text{ για κάθε } y \in Y, \\ h(z) \leq p(z) \text{ για κάθε } z \in Z. \end{array} \right\}$$

Στο $\mathcal{S}$ ορίζουμε μία μερική διάταξη, λέγοντας ότι $(Z_1, h_1) \leq (Z_2, h_2)$, αν $Z_1 \subseteq Z_2$ και $h_2(z) = h_1(z)$ για κάθε $z \in Z_1$.

Κάθε αλυσίδα στο $\mathcal{S}$ έχει άνω φράγμα: αν $\mathcal{C} = \{(Z_i, h_i) : i \in I\}$ είναι μια τέτοια αλυσίδα, τότε ορίζουμε

$$Z = \bigcup_{i \in I} Z_i, \quad h : Z \to \mathbb{R},\ h(z) = h_i(z) \text{ αν } z \in Z_i.$$

Η h είναι καλά ορισμένη, από τον ορισμό της μερικής διάταξης, και είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι το (Z,h) είναι άνω φράγμα της $\mathcal{C}$.

Από το λήμμα του Zorn, υπάρχει μεγιστικό στοιχείο (Z,h) του $\mathcal{S}$, οπότε ο Z είναι υπόχωρος του X με $Y \subseteq Z$, το $h : Z \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές, επεκτείνει το f_Y, και φράσσεται από πάνω από το p στον Z. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι $Z = X$.

Έστω ότι $Z \neq X$, τότε υπάρχει $x_0 \in X \setminus Z$. Θεωρούμε μία βάση B του Z, και θέτουμε

$$B_0 = B \cup \{x_0\}, \quad Z_0 = \operatorname{span} B_0.$$

Το Z_0 είναι γραμμικός υπόχωρος του X, με βάση B_0. Για $a \in \mathbb{R}$ που θα επιλεγεί αργότερα, θεωρούμε το γραμμικό συναρτησοειδές $h_0 : Z_0 \to \mathbb{R}$ με

$$h_0(x) = h(x) \text{ για } x \in B, \quad h_0(x_0) = a,$$

όπου επεκτείνουμε γραμμικά στον Z_0. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $h_0(z_0) \leq p(z_0)$ για κάθε $z_0 \in Z_0$: ισοδύναμα, θέλουμε

$$h(z) + \lambda a \leq p(z + \lambda x_0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall z \in Z. \tag{2.1}$$

Αν $\lambda > 0$, η προηγούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$h(w) + a \leq p(w + x_0) \quad \forall w \in Z,$$

και αν $\lambda < 0$, ισοδύναμα θέλουμε

$$h(w') - a \leq p(w' - x_0) \quad \forall w \in Z.$$

Επομένως, υπάρχει a που να ικανοποιεί την (2.1) αν και μονο αν

$$\sup_{w' \in Z} \big(h(w') - p(w' - x_0)\big) \leq \inf_{w \in Z} \left(p(w + x_0) - h(w)\right).$$

Αν αυτό δεν ισχύει, τότε υπάρχουν $w, w' \in Z$ με

$$h(w') - p(w' - x_0) > p(w + x_0) - h(w),$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$p(w' - x_0) + p(w + x_0) < h(w') + h(w) = h(w' + w) \leq p(w' + w) \leq p(w' - x_0) + p(w + x_0),$$

αφού $h \leq p$ στο Z, το οποίο είναι άτοπο. Άρα υπάρχει a το οποίο να ικανοποιεί την (2.1), και το $h_0 : Z_0 \to \mathbb{R}$ φράσσεται από πάνω από το p. Τότε, $(Z,h) \leq (Z_0, h_0)$ με $Z \neq Z_0$, οπότε το (Z,h) δεν είναι μεγιστικό, άτοπο. Έπομένως $Z = X$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

2.2 Εφαρμογές του Θεωρήματος Hahn-Banach

Η πρώτη εφαρμογή του Θεωρήματος Hahn-Banach μας δείχνει ότι ο X^* έχει πολλά συναρτησοειδή.

Πρόταση 2.8. *Έστω X χώρος με νόρμα και $x_0 \in X$ με $x_0 \neq 0$. Τότε υπάρχει $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$ και $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον υπόχωρο $Y = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ του X, θέτουμε $f_0(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, και $p(x) = \|x\|$ για $x \in X$. Το $f_0 : Y \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, με $f_0(y) \leq p(y)$ για κάθε $y \in Y$. Τότε, από το Θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq \|x\|$ για κάθε $x \in X$, και $f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|$. Επιπλέον, θεωρώντας το $-x$, παίρνουμε ότι $\|f\| \leq 1$, και αφού $f(x_0) = \|x_0\|$, τελικά $\|f\| = 1$. □

Ως πόρισμα, παίρνουμε το ότι η νόρμα στον X "πιάνεται" από συναρτησοειδή.

Πόρισμα 2.9. *Έστω X χώρος με νόρμα. Για κάθε $x \in X$,*

$$\|x\| = \max\{f(x) : f \in X^*, \|f\| = 1\}.$$

Απόδειξη. Αν $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$, τότε $f(x) \leq |f(x)| \leq \|x\|$. Επιπλέον, αν f είναι το συναρτησοειδές της Πρότασης 2.8, τότε $f(x) = \|x\|$, άρα το μέγιστο λαμβάνεται. □

Επιπλέον, τα γραμμικά συναρτησοειδή διαχωρίζουν κλειστούς υπόχωρους από σημεία.

Πρόταση 2.10. *Έστω X χώρος με νόρμα, Y γνήσιος, κλειστός υπόχωρος του X, και $x_0 \in X \setminus Y$. Αν $d = \mathrm{dist}(x_0, Y)$, τότε υπάρχει $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$ και*

$$Y \subseteq \ker f, \quad f(x_0) = d.$$

Απόδειξη. Έστω B μία βάση του Y, και θέτουμε $B_0 = B \cup \{x_0\}$. Το B_0 είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο, και παράγει έναν υπόχωρο Z_0 του X. Ορίζουμε ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f_0 : Z_0 \to \mathbb{R}$, θέτοντας

$$f_0(z) = 0 \quad \text{για κάθε } z \in Z, \quad f_0(x_0) = d,$$

και επεκτείνοντας γραμμικά στον Z_0. Αν $z \in Z$ και $\lambda \neq 0$, τότε

$$\|z + \lambda x_0\| = |\lambda| \left\| \frac{1}{\lambda} z + x_0 \right\| \geq |\lambda| d,$$

επομένως

$$|f_0(z + \lambda x_0)| = |\lambda| d \leq \|z + \lambda x_0\|,$$

άρα το $f_0 : Z_0 \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο, με $\|f\| \leq 1$. Επιπλέον, υπάρχει ακολουθία (z_n) στο Z με $\|x_0 - z_n\| \to d$, και τότε

$$f_0\left(\frac{x_0 - z_n}{\|x_0 - z_n\|}\right) = \frac{1}{\|x_0 - z_n\|} f(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

άρα $\|f_0\| = 1$. Τέλος, η ύπαρξη του ζητούμενου $f \in X^*$ έπεται από το Θεώρημα Hahn-Banach. □

Ως πόρισμα παίρνουμε επισης την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.11. *Αν X χώρος με νορμα, η κανονική εμφύτευση $E : X \to X^{**}$ είναι ισομετρία.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\|Ex\|_{X^{**}} = \sup\{|Ex(f)| : f \in X^*, \|f\| = 1\} = \sup\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| = 1\} = \|x\|,$$

από το Πόρισμα 2.8. $\square$

Η προηγούμενη πρόταση μας δείχνει επίσης ότι αν $x^{**} \in E(X)$, τότε η νόρμα του x^{**} "πιάνεται" για κάποιο $f \in X^*$. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει.

2.3 Το Θεώρημα Hahn-Banach, η γεωμετρική μορφή

Μία άλλη μορφή του θεωρήματος Hahn-Banach περιγράφει το πως δύο κυρτά υποσύνολα ενός χώρου με νόρμα X μπορούν να διαχωριστούν από κλειστά υπερεπίπεδα.

Ορισμός 2.12. Έστω X χώρος με νόρμα. Λέμε ότι ένας υπόχωρος Y του X είναι συνδιάστασης $n \in \mathbb{N}$, αν ο χώρος πηλίκο X/Y έχει διάσταση n. Οι υπόχωροι συνδιάστασης 1 ονομάζονται υπερεπίπεδα.

Ένα επιχείρημα γραμμικής άλγεβρας μας οδηγεί στο εξής λήμμα.

Λήμμα 2.13. *Έστω X γραμμικός χώρος. Οι υπόχωροι συνδιάστασης 1 του X είναι ακριβώς οι πυρήνες των γραμμικών συναρτησοειδών $f : X \to \mathbb{R}$.*

Πρόταση 2.14. *Έστω χώρος με νόρμα. Τότε, οι υπόχωροι συνδιάστασης 1 είναι είτε κλειστοί, είτε πυκνοί στον X.*

Απόδειξη. Έστω Y υπόχωρος του X, συνδιάστασης 1. Αν ο Y δεν είναι κλειστός, τότε υπάρχει $z \in \overline{Y} \setminus Y$. Θεωρώντας την απεικόνιση πηλίκο $Q : X \to X/Y$, μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε $x \in X$ γράφεται ως $x = y + \lambda z$, όπου $y \in Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, επομένως $X \subseteq \overline{Y}$. Επομένως ο Y είναι πυκνός στον X. $\square$

Αφού οι υπόχωροι συνδιάστασης 1 περιγράφονται από συναρτησοειδή, οδηγούμαστε στον εξής ορισμό: αν X είναι χώρος με νόρμα, τότε ένα *υπερεπίπεδο* είναι ένα σύνολο της μορφής $[f = a]$, όπου $f : X \to \mathbb{R}$ μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές, και $a \in \mathbb{R}$. Βάσει της πρότασης 2.14, ένα υπερεπίπεδο είναι κλειστό αν και μόνο αν $f \in X^*$.

Ορισμός 2.15. Έστω X γραμμικός χώρος. Ένα υποσύνολο $C \subseteq X$ ονομάζεται κυρτό, αν για κάθε $x, y \in C$ και $t \in [0, 1]$,

$$tx + (1 - t)y \in C,$$

δηλαδή, το ευθύγραμμο τμήμα από το x στο y είναι υποσύνολο του C, για κάθε $x, y \in C$.

Ορισμός 2.16. Έστω $A, B \subseteq X$ υποσύνολα ενός γραμμικού χώρου X. Αν $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές και $a \in \mathbb{R}$, λέμε ότι το υπερεπίπεδο $[f = a]$ διαχωρίζει τα A, B, αν

$$f(x) \leq a,\ \ f(y) \geq a, \quad \forall x \in A, y \in B.$$

Λέμε ότι το $[f = a]$ διαχωρίζει τα A, B γνησίως, αν

$$f(x) < a,\ \ f(y) > a, \quad \forall x \in A, y \in B.$$

Τέλος, λέμε ότι το $[f = a]$ διαχωρίζει τα A, B αυστηρά, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq a - \varepsilon,\ \ f(y) \geq a + \varepsilon, \quad \forall x \in A, y \in B.$$

Αν $A, B \subseteq X$ μη κενά και κυρτά υποσύνολα ενός χώρου με νόρμα X, τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους, περιμένουμε ότι υπάρχει κλειστό υπερεπίπεδο το οποίο τα διαχωρίζει. Παρ'όλ'αυτά, υπάρχουν αντιπαραδείγματα που δείχουν ότι πρέπει τουλάχιστον το ένα από τα δύο σύνολα να είναι ανοικτό.

Θα αποδειξουμε τη γεωμετρική μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach από την αναλυτική μορφή, οπότε στρεφόμαστε στη σχέση υπογραμμικών συναρτησοειδών με κυρτά σύνολα. Αρχικά, αν το $p : X \to \mathbb{R}$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές, τότε για κάθε x, y με $p(x), p(y) < 1$ και $t \in (0, 1)$,

$$p(tx + (1-t)y) \leq p(tx) + p((1-t)y) = tp(x) + (1-t)p(y) < 1,$$

επομένως το $[p < 1]$ είναι κυρτό. Ένα μερικό αντίστροφο είναι το ακόλουθο.

Λήμμα 2.17. *Έστω X χώρος με νόρμα, $C \subseteq X$ ανοικτό και κυρτό υποσύνολο του X, με $0 \in C$. Ορίζουμε το συναρτησοειδές Minkowski*

$$p_C : X \to [0, \infty), \quad p_C(x) = \inf\{t > 0 : x \in tC\}.$$

Τότε το p_C είναι μη αρνητικό υπογραμμικό συναρτησοειδές στον X, και υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $p_C(x) \leq M\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Επιπλέον, $C = [p_C < 1]$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$ για κάθε $x, y \in X$, καθώς οι άλλες ιδιότητες είναι άμεσες. Αν $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $t_x, t_y > 0$ με $t_x < p_C(x) + \varepsilon$, $t_y < p_C(y) + \varepsilon$ και $x \in t_x C$, $y \in t_y C$, επομένως υπάρχουν $c_x, c_y \in C$ με $x = t_x c_x$, $y = t_y c_y$. Τότε

$$x + y = t_x c_x + t_y c_y = (t_x + t_y)\left(\frac{t_x}{t_x + t_y} c_x + \frac{t_y}{t_x + t_y} c_y\right) = (t_x + t_y)c_0,$$

με $c_0 \in C$, λόγω κυρτότητας. Επομένως $p_C(x+y) \leq t_x + t_y < p_C(x) + p_C(y) + 2\,\varepsilon$, που δείχνει την ανισότητα. □

Θεώρημα 2.18. *[Θεώρημα Hahn-Banach, πρώτη γεωμετρική μορφή] Έστω X χώρος με νόρμα, $A, B \subseteq X$ μη κενά, κυρτά και ξένα υποσύνολα του X, με το A να είναι ανοικτό. Τότε υπάρχει κλειστό υπερεπίπεδο το οποίο διαχωρίζει τα A, B.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε αρχικά το θεώρημα όταν το $B = \{x_0\}$ με $x_0 \notin A$. Έπειτα από μεταφορά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in A$. Θεωρούμε το συναρτησοειδές Minkowski $p_A : X \to \mathbb{R}$, τον γραμμικό υπόχωρο $Y = \operatorname{span}\{x_0\}$, και ορίζουμε $f(tx_0) = t$ για $t \in \mathbb{R}$. Αν $t > 0$, τότε $p_A(tx_0) \geq t$: αν όχι, τότε $p_A(tx_0) < t$, και υπάρχει $s > 0$ με $tx_0 \in sC$ και $s < t$, επομένως $x_0 = \frac{s}{t}c_0$ για καποιο $c_0 \in C$. Αφού $0 \in C$, τότε $x_0 \in C$ από την κυρτότητα του C, το οποίο είναι άτοπο. Άρα $t \leq p_A(tx_0)$ για κάθε $t > 0$. Η ίδια σχέση ισχύει και για κάθε $t < 0$, άρα $f \leq p_A$ στον Y.

Από το Θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει γραμμική επέκταση $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) \leq p_A(x)$ για κάθε $x \in X$. Τότε, από το Λήμμα 2.17 το f είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, και $p_A(x_0) \geq 1$, με $p_A(x) < 1$ για κάθε $x \in A$. Άρα το κλειστό υπερεπίπεδο $[f = 1]$ διαχωρίζει τα $A, \{x_0\}$.

Αν τώρα το A είναι ανοικτό και κυρτό και το $B \subseteq X$ είναι μη κενό και κυρτό, με $A \cap B = \varnothing$, θέτουμε

$$C = A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}.$$

Το C είναι κυρτό, είναι ανοικτό αφού

$$C = \bigcup_{b \in B} (A - \{b\}),$$

και $0 \notin C$. Από το αρχικό επιχείρημα υπάρχει $f \in X^*$ και $a' \in \mathbb{R}$ με $f(x-y) \leq a'$ για κάθε $x \in A, y \in B$, και $f(0) \geq a'$. Άρα $a' \leq 0$, και $f(x-y) \leq 0$ για κάθε $x \in A$ και $y \in B$. Επομένως $f(x) \leq f(y)$ για κάθε $x \in A, y \in B$, και θεωρώντας a μεταξύ των προηγούμενων αριθμών για κάθε $x \in A, y \in B$, έχουμε ότι το $[f = a]$ διαχωρίζει τα A, B. $\square$

Για να διαχωρίζονται τα A, B γνησίως, χρειαζόμαστε επιπλέον υποθέσεις. Για παράδειγμα, τα σύνολα

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < 0\}, \quad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > \frac{1}{x}\right\}$$

είναι και τα δύο ανοικτά και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$, τα οποία δεν διαχωρίζονται γνησίως.

Θεώρημα 2.19. *[Θεώρημα Hahn-Banach, δεύτερη γεωμετρική μορφή] Έστω X χώρος με νόρμα, $A, B \subseteq X$ μη κενά, κυρτά και ξένα υποσύνολα του X, με το A να είναι κλειστό και το B συμπαγές. Τότε υπάρχει κλειστό υπερεπίπεδο το οποίο διαχωρίζει τα A, B γνησίως.*

Απόδειξη. Θέτουμε $C = A - B$. Τό C είναι κλειστό: αν $x_n \in A, y_n \in B$ με $x_n - y_n \to z \in X$, τότε η (y_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $y_{k_n} \to y \in B$, άρα $x_{k_n} \to z + y \in A$, και $z = (z+y) - y \in A - B$. Το C επίσης είναι κυρτό, και $0 \notin C$, άρα υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $B_r(0) \cap C = \varnothing$.

Από την πρώτη γεωμετρική μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach, υπάρχει $f \in X^*$ και $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq a$ για κάθε $c \in C$ και $f(z) \leq a$ για κάθε $z \in B_r(0)$. Αν $a \leq 0$, τότε $f(z) \leq 0$ για κάθε $z \in B_r(x)$, επομένως $f(z) \geq 0$ για καθε $z \in B_r(x)$, το οποίο συνεπάγεται ότι $f \equiv 0$, άτοπο. Άρα $a > 0$, και αν $a = 3\,\varepsilon$, τότε $f(x-y) \geq 3\,\varepsilon$ για κάθε $x \in A$ και $y \in B$, και το ζητούμενο έπεται. $\square$

2.4 Σχέσεις καθετότητας

Ορισμός 2.20. Έστω X χώρος με νόρμα και $Y \subseteq X$ μη κενό σύνολο. Το ορθογώνιο συμπλήρωμα του Y είναι το σύνολο

$$Y^\perp = \{f \in X^* : f(y) = 0 \ \ \forall y \in Y\}.$$

Αν $Z \subseteq X^*$ μη κενό, το προ-ορθογώνιο συμπλήρωμα του Z είναι το σύνολο

$${}^\perp Z = \{x \in X : f(x) = 0 \ \ \forall f \in Z\}.$$

Είναι φανερό από τον ορισμό ότι τα $Y^\perp$ και ${}^\perp Z$ είναι κλειστοί υπόχωροι των X^*, X αντίστοιχα. Ο συνδυασμός όμως των δύο συμπληρωμάτων οδηγεί σε διαφορετικό αποτέλεσμα, ανάλογα με τη σειρά.

Πρόταση 2.21. *Έστω X χώρος με νόρμα, $Y \subseteq X$ και $Z \subseteq X^*$ μη κενά σύνολα. Τότε,*

$${}^\perp(Y^\perp) = \overline{\operatorname{span} Y}, \quad ({}^\perp Z)^\perp \supseteq \overline{\operatorname{span} Z}.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε την πρώτη σχέση. Αρχικά, από τους ορισμούς, $Y \subseteq {}^\perp(Y^\perp)$, οπότε έπεται ο ένας εγκλεισμός. Έστω τώρα ότι υπάρχει $x \in {}^\perp(Y^\perp) \setminus \overline{\operatorname{span} Y}$. Αφού ο $\overline{\operatorname{span} Y}$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y, από την Πρόταση 2.10 υπάρχει $f \in X^*$ με $f \equiv 0$ στο $\overline{\operatorname{span} Y}$ και $f(x) \neq 0$. Τότε $f \in Y^\perp$, άρα $f(x) = 0$, άτοπο. $\square$

2.5 Βασικά θεωρήματα σε χώρους Banach

Στο πλαίσιο των χώρων Banach, υπάρχουν τρία θεμελιώδη θεωρήματα τα οποία χρησιμοποιούν την πληρότητα με ουσιώδη τρόπο. Το πρώτο από αυτά λέει ότι, για να ελέγξουμε το αν μία οικογένεια τελεστών είναι φραγμένη ως προς τη νόρμα τελεστή, αρκεί να ελέγξουμε ότι είναι φραγμένη κατά σημείο.

Θεώρημα 2.22 (Ομοιόμορφου φράγματος)**.** *Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και $\mathcal{F} \subseteq B(X,Y)$ μία οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών. Αν*

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < \infty \quad \textit{για κάθε } x \in X,$$

τότε υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε $\|T\| \leq C$ για κάθε $T \in \mathcal{F}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα

$$A_n = \{x \in X : |T(x)| \leq n \ \forall T \in \mathcal{F}\}.$$

Κάθε A_n είναι κλειστό υποσύνολο του X, και η ένωσή του είναι ίση με τον X. Επομένως, το Θεώρημα του Baire δείχνει ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το A_{n_0} να περιέχει μία ανοικτή μπάλα του X. Τότε, το ζητούμενο έπεται λόγω της γραμμικότητας των T. □

Ως πόρισμα παίρνουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 2.23 (Banach-Steinhaus)**.** *Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και έστω (T_n) ακολουθία φραγμένων γραμμικών τελεστών, τέτοιων ώστε για κάθε $x \in X$, το όριο της $(T_n x)_n$ υπάρχει στο Y. Αν ορίσουμε $T : X \to Y$ με $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$, τότε ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, με*

$$\|T\| \leq \liminf \|T_n\| < \infty.$$

Στο προηγούμενο θεώρημα, η κατά σημείο σύγκλιση δεν συνεπάγεται σύγκλιση των τελεστών. Για παράδειγμα,αν

$$f_n, f : \ell^1 \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k, \ f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k,$$

τότε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in \ell^1$ καθώς το $n \to \infty$, αλλά $\|f_n - f\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Μία βασική εφαρμογή της αρχής ομοιόμορφου φράγματος μας δείχνει ότι ένα υποσύνολο του X^* είναι φραγμένο, αν και μόνο αν η εικόνα του μεσω του x είναι φραγμένο, για κάθε $x \in X$.

Πρόταση 2.24. *Έστω X χώρος Banach και $A \subseteq X^*$, μη κενό. Το A είναι φραγμένο αν και μόνο αν, για κάθε $x \in X$, το σύνολο $\{f(x) : x \in A\}$ είναι φραγμένο.*

Απόδειξη. Το ευθύ είναι απλό, και το αντίστροφο προκύπτει από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος. □

Ισχύει επίσης η δϋική πρόταση, σε οποιονδήποτε χώρο με νόρμα.

Πρόταση 2.25. *Έστω X χώρος με νόρμα και $B \subseteq X$, μη κενό. Το B είναι φραγμένο αν και μόνο αν, για κάθε $f \in X^*$, το σύνολο $\{f(x) : x \in B\}$ είναι φραγμένο.*

Απόδειξη. Το ευθύ είναι απλό. Για το αντίστροφο, θεωρούμε την κανονική εμφύτευση $E : X \to X^{**}$. Τότε, για κάθε $Ex \in E(B)$,

$$|Ex(f)| = |f(x)| \leq C_f,$$

επομένως, αφού ο X είναι χώρος Banach, το $E(B)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του X^{**} από την Πρόταση 2.24. Αφού η E είναι ισομετρία, έπεται ότι το B είναι φραγμένο υποσύνολο του X. □

Παρατήρηση 2.26. Αν και η προηγούμενη πρόταση ισχύει σε κάθε χώρο με νόρμα, το αντίστοιχο της Πρότασης 2.24 σε χώρους με νόρμα δεν ισχύει απαραίτητα. Ένα παράδειγμα δίνεται από την ακολουθία

$$f_n : c_{00} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα λέει ότι συνεχείς και επί γραμμικοί τελεστές μεταξύ χώρων Banach είναι πάντα ανοικτές απεικονίσεις.

Πρόταση 2.27. *Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος, και* ***επί*** *γραμμικός τελεστής. Τότε η εικόνα της B_X περιεχει μία μπάλα του Y με κέντρο το* 0.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα

$$A_n = nT(B_X), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Η ένωση των A_n είναι ίση με το X, άρα από το θεώρημα του Baire υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το $\overline{nT(B_X)}$ να περιέχει μία μπάλα $B_r(y)$, όπου $r > 0$ και $y \in Y$. Λόγω γραμμικότητας του T, $B_r(-y) \subseteq \overline{nT(B_X)}$, άρα αν $\|z\| < r$,

$$z = \frac{1}{2}(z+y) + \frac{1}{2}(z-y) = \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2,$$

όπου τα w_1, w_2 ανήκουν στις $B_r(y), B_r(-y)$ αντίστοιχα. Επομένως, $z \in \overline{nT(B_X)}$, και

$$B_\delta \subseteq \overline{T(B_X)}, \quad \delta = \frac{r}{n} > 0.$$

Μέχρι εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει μόνο την πληρότητα του Y.

Θα δείξουμε τώρα ότι $B_{\delta/2} \subseteq T(B_X)$: έστω $z \in X$ με $\|z\| < \frac{\delta}{2}$. Τότε $z \in \frac{1}{2}\overline{T(B_X)}$, άρα υπάρχει $x_1 \in X$ με $\|x_1\| < \frac{1}{2}$ και

$$\|z - Tx_1\| < \frac{\delta}{2^2}.$$

Τότε $z - Tx_1 \in \frac{1}{2^2}\overline{T(B_X)}$, άρα υπάρχει $x_2 \in X$ με $\|x_2\| < \frac{1}{2^2}$ και

$$\|z - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{\delta}{2^3}.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, κατασκευάζουμε ακολουθία (x_n) με $\|x_n\| < \frac{1}{2^{n+1}}$, και

$$\|z - Tx_1 - Tx_2 - \cdots - Tx_n\| < \frac{\delta}{2^{n+1}}.$$

Τότε, η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$ με $\|x\| = 1$, και $Tx = z$. □

Θεώρημα 2.28 (Ανοικτής απεικόνισης)**.** *Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ γραμμικός και επί τελεστής. Τότε ο T είναι ανοικτή απεικόνιση.*

Αν υποθέσουμε ότι ο T είναι και 1-1, τότε ο T γίνεται ισομορφισμός μεταξύ των X, Y.

Θεώρημα 2.29 (Αντίστροφης απεικόνισης)**.** *Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ γραμμικός, 1-1 και επί τελεστής. Τότε ο $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένος τελεστής.*

Πόρισμα 2.30. *Έστω X γραμμικός χώρος, και $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ δύο νόρμες στον X, τέτοιες ώστε οι $(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$ να είναι χώροι Banach. Αν υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ για κάθε $x \in X$, τότε οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.*

Όταν μία συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι συνεχής, τότε το γράφημά της $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του γινομένου $X \times Y$, και γενικά το αντίστροφο δεν ισχύει. Ωστόσο, στο πλαίσιο των χώρων Banach έχουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 2.31 (Κλειστού γραφήματος)**.** *Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Έστω ότι, για κάθε ακολουθία (x_n) στον X με $x_n \to x \in X$ και $Tx_n \to y \in Y$, έχουμε ότι $Tx = y$. Τότε ο T είναι φραγμένος.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον χώρο $X \times Y$, με νόρμα

$$\|(x, y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Αφού οι X, Y είναι χώροι Banach, μπορούμε να δείξουμε ότι ο $(X \times Y, \|\cdot\|_1)$ είναι χώρος Banach. Θεωρούμε τώρα το γράφημα του T,

$$G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\} \subseteq X \times Y,$$

το οποίο είναι υπόχωρος του $X \times Y$. Οι υποθέσεις μας δείχνουν ότι το $G(T) \subseteq X \times Y$ είναι κλειστός υπόχωρος, άρα είναι χώρος Banach.

Ορίζουμε μία δεύτερη νόρμα στον $G(T)$, με

$$\|(x, Tx)\|_2 = \|x\|_X.$$

Είναι απλό να δείξουμε ότι η $\|\cdot\|_2$ είναι νόρμα στον $G(T)$, και

$$\|z\|_2 \leq \|z\|_1,$$

για κάθε $z \in G(T)$. Από το Πόρισμα 2.30, οι νόρμες $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ είναι ισοδύναμες στον $G(T)$: υπάρχει $C > 0$ με

$$\|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_1 \leq C\|(x, Tx)\|_2 = C\|x\|_X,$$

άρα ο T είναι φραγμένος τελεστής. □

2.6 Συζυγείς τελεστές

Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ο συζυγής τελεστής του T είναι ο τελεστής ο οποίος ορίζεται ως

$$T^* : Y^* \to X^*, \quad T^* f(x) = T(f(x)).$$

Με τον προηγούμενο ορισμό, μπορούμε να δούμε ότι $\|T^*\| \leq \|T\|$. Επιπλέον, $(aT + bS)^* = aT^* + bS^*$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ και $T, S \in \mathcal{B}(X, Y)$, και $(TV)^* = V^*T^*$ για κάθε $V \in \mathcal{B}(X, Y), T \in \mathcal{B}(Y, Z)$.

Πρόταση 2.32. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T \in B(X,Y)$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

i) $T^{**}|_X = T$.

ii) $\|T\| = \|T^*\|$.

iii) Αν ο T είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο T^* είναι αντιστρέψιμος.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε τη δεύτερη ιδιότητα: έχουμε ήδη δείξει ότι $\|T^*\| \leq \|T\|$. Αν τώρα $x \in X$, τότε, από την πρώτη ιδιότητα,

$$\|Tx\| = \|T^{**}(Ex)\| \leq \|T^{**}\|\|Ex\|_{X^{**}} = \|T^{**}\|\|x\|_X,$$

λόγω του ότι η $E : X \to X^{**}$ είναι ισομετρία. Επομένως,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq \|T^{**}\| \leq \|T^*\|,$$

αφού γενικά $\|T^*\| \leq \|T\|$. Επομένως $\|T\| = \|T^*\|$. $\square$

2.7 Δϋικοί χώροι

Στα επόμενα παραδειγματα περιγράφουμε τους δϋικούς χώρους κλασσικών χώρων.

Παράδειγμα 2.33. Έστω $p \in [1, \infty)$. Ο δϋικός χώρος του ℓ^p είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ^q, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, δηλαδή ο q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Ένας ισομετρικός ισομορφισμός δίνεται από την απεικόνιση

$$T : \ell^q \to (\ell^p)^*, \quad Tx(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \ \forall x \in \ell^q, y \in \ell^p.$$

Αν $p \in (1, \infty)$, ο ℓ^p είναι αυτοπαθής.

Παράδειγμα 2.34. Αν $p \in [1, \infty)$ και $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, τότε ο δϋικός χώρος του $L^p(\Omega)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^q(\Omega)$, όπου ο q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Ένας ισομετρικός ισομορφισμός δίνεται από την απεικόνιση

$$T : L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*, \quad Tf(g) = \int_\Omega fg\,dx, \ \forall f \in L^q, g \in L^p.$$

Επιπλέον, ο $L^p(\Omega)$ είναι αυτοπαθής για $p \in (1, \infty)$.

Τα προηγούμενα δύο παραδείγματα είναι ειδικές περιπτώσεις ενός γενικότερου πλαισίου για χώρους L^p σε χώρους μέτρου.

Παράδειγμα 2.35. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $C_0(\Omega)$ τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων που "μηδενίζονται στο άπειρο", δηλαδή τον χώρο

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : \forall \varepsilon > 0\ \exists K \subseteq \Omega,\ K \text{ συμπαγές} : x \in \Omega \setminus K \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon\}.$$

Ο $C_0(\Omega)$ είναι χώρος Banach, και είναι η πλήρωση του $C_c(\Omega)$.

Έστω τώρα $\mathcal{R}(\Omega)$ ο χώρος των προσημασμένων μέτρων Radon, δηλαδή των προσημασμένων μέτρων Borel στο Ω τα οποία είναι εσωτερικά και εξωτερικά κανονικά. Θεωρούμε τον $\mathcal{R}(\Omega)$ με τη νορμα της ολικής κύμανσης. Ένα τέτοιο μέτρο ορίζει συναρτησοειδές στον $C_0(\Omega)$ μέσω της σχέσης

$$T_\mu f = \int_\Omega f\,d\mu.$$

Τα προηγούμενα συναρτησοειδή εξαντλούν τα φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή.

Θεώρημα 2.36 (Riesz). *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση*

$$T : \mathcal{R}(\Omega) \to (C_0(\Omega))^*, \quad T \mapsto T_\mu$$

είναι ένας ισομοετρικός ισομορφισμός μεταξύ του $\mathcal{R}(\Omega)$ και του δϋικού χώρου του $C_0(\Omega)$.

3 Ασθενείς τοπολογίες

3.1 Εισαγωγή

Μία απο τις πολύ χρήσιμες ιδιότητες ενός υποσυνόλου κάποιου χώρου είναι αυτή της συμπάγειας, και μία από τις πολλές εφαρμογές της αφορά την ελαχιστοποίηση ποσοτήτων. Για παράδειγμα, έστω X χώρος Banach, Y κλειστός γραμμικός του υπόχωρος, $x \notin Y$, και έστω ότι θέλουμε να βρούμε κάποιο $y \in Y$ τέτοιο ώστε

$$\|x - y\| = \text{dist}(x, Y).$$

Μία διαδικασία είναι η εξής: για $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε $y_n \in Y$ με

$$\|x - y_n\| < \text{dist}(x, Y) + \frac{1}{n}.$$

Παρατηρούμε ότι η (y_n) είναι φραγμένη. Στην περίπτωση που η (y_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $y_{k_n} \to y_0 \in Y$, τότε λόγω της συνέχειας της νόρμας,

$$\|x - y_0\| = \text{dist}(x, Y).$$

Δηλαδή, ιδανικά, ζητάμε κάθε φραγμένη ακολουθία στον Y να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στον Y, που είναι ισοδύναμο με την συμπάγεια της κλειστής μοναδιαίας μπάλας.

Στη γενική περίπτωση χώρων με νορμα, η προηγούμενη ιδιότητα δεν ισχύει, καθώς η συμπάγεια της μοναδιαίας μπάλας είναι ισοδύναμη με το ότι ο χώρος έχει πεπερασμένη διάσταση. Η προηγούμενη διαδικασία όμως μπορεί να παραλλαχθεί, κρατώντας τη βασική της ιδέα:

i) Θέλουμε κάθε φραγμένη ακολουθία να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Η σύγκλιση αυτή όμως δεν είναι απαραίτητο να είναι στην τοπολογία που ορίζει η νόρμα του X, αλλά σε κάποια άλλη τοπολογία.

ii) Με την προηγούμενη τοπολογία, δεν είναι απαραίτητο η $\|\cdot\|$ να είναι συνεχής, αλλά ανω ημισυνεχής.

Έτσι, η κεντρική ιδέα στα ακόλουθα είναι η εξής:

για να "κερδίσουμε" συμπάγεια, πρέπει να αλλάξουμε την τοπολογία.

Αλλάζοντας την τοπολογία, η συμπάγεια πλέον δεν είναι ισοδύναμη με την ακολουθιακή συμπάγεια, και χρειαζόμαστε τον ορισμό των ανοικτών καλυμμάτων: αν $\mathcal{T}$ είναι μία τοπολογία σε έναν χώρο X, ένα $K \subseteq X$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Έτσι, προκειμένου να έχουμε περισσότερα συμπαγή σύνολα, πρέπει να έχουμε λιγότερους τρόπους να σχηματίζουμε ανοικτά καλύμματα ενός συνόλου, επομένως

για περισσότερα συμπαγή σύνολα, θέλουμε λιγότερα ανοικτά.

Η τοπολογια η οποία θα θεωρήσουμε σε έναν χώρο Banach X δεν μπορεί να είναι η τετριμμένη, γιατί η τοπολογία αυτή "αγνοεί" τη γραμμική δομή του X. Έτσι, και αφού τα φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή σχετίζονται με τις τοπολογικές ιδιότητες ενός χώρου με νόρμα, θέλουμε τουλάχιστον αυτά τα συναρτησοειδή, τα οποία είναι συνεχείς συναρτήσεις από τον $(X, \|\cdot\|_X)$ στο $\mathbb{R}$, να εξακολουθουν να είναι συνεχείς συναρτήσεις από τον $(X, \mathcal{T})$ στον $\mathbb{R}$. Έτσι, τουλάχιστον ζητάμε το εξής:

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ και } f \in X^*, \text{ το συνολο } f^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) = \{x \in X : |f(x)| < \varepsilon\} \text{ είναι ανοικτό,}$$

και οι "μεταφορές" των ανοικτών συνόλων εξακολουθούν να είναι ανοικτά σύνολα. Δηλαδή,

$$\text{για κάθε } y \in X, \varepsilon > 0, f \in X^*, \text{ το συνολο } \{x \in X : |f(x-y)| < \varepsilon\} \text{ είναι ανοικτό,}$$

Θα ορίσουμε μία τοπολογία στον X η οποία θα είναι η μικρότερη η οποία να περιέχει τα προηγούμενα σύνολα, δηλαδή τα προηγούμενα σύνολα να είναι μία υποβάση της τοπολογίας.

3.2 Η ασθενής τοπολογία

Ορισμός 3.1. Έστω X χώρος Banach. Η ασθενής τοπολογία w στον X είναι η μικρότερη τοπολογία στον X τέτοια ώστε, όλα τα $f \in X^*$ να είναι συνεχή ως συναρτήσεις $f : (X, w) \to \mathbb{R}$.

Αν $x_0 \in X$, τότε τα σύνολα

$$V(x_0, f_1, \dots f_n, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon\}, \tag{3.1}$$

αποτελούν μία βάση περιοχών του x_0, όπου $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots f_n \in X^*$, και $\varepsilon > 0$. Δηλαδή, ένα υποσύνολο $U \subseteq X$ είναι ανοικτό, αν και μόνο αν για κάθε $x_0 \in U$ υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots f_n \in X^*$, και $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε

$$V(x_0, f_1, \dots f_n, \varepsilon) \subseteq U.$$

Παρατηρήστε ότι όλα τα σύνολα στην (3.1) είναι *κυρτά*.

Μία βάση της ασθενούς τοπολογίας δίνεται από τα σύνολα

$$V(x_1, f_1^1, \dots f_{n_1}^1, \varepsilon_1) \cap V(x_2, f_1^2, \dots f_{n_2}^2, \varepsilon_2) \cap \dots \cap V(x_m, f_1^m, \dots f_{n_m}^m, \varepsilon_m),$$

όπου τα $x_i \in X$, $f_i^j \in X^*$, και $\varepsilon_i > 0$. Δηλαδή, η τοπολογία w είναι η οικογένεια όλων των ενώσεων των προηγούμενων συνόλων.

Πρόταση 3.2. *Η ασθενής τοπολογία είναι Hausdorff.*

Απόδειξη. Έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$. Θέτουμε $z = x - y$, τότε $z \neq 0$, άρα από την Πρόταση 2.8, υπάρχει $f \in X^*$ με $f(x - y) = \varepsilon > 0$. Τότε, τα σύνολα

$$V_1 = V(x, f, \varepsilon/2) = \{z \in X : |f(z - x)| < \varepsilon/2\}, \quad V_2 = V(y, f, \varepsilon/2) = \{z \in X : |f(z - y)| < \varepsilon/2\}$$

είναι ανοικτά και ξένα, με $x \in V_1$ και $y \in V_2$. $\square$

Από τη γενική τοπολογία, έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 3.3. *Έστω X χώρος Banach, και Y ένας τοπολογικός χώρος. Μία απεικόνιση $g : Y \to (X, w)$ είναι συνεχής, αν και μόνο αν για κάθε $f \in X^*$, η $f \circ g : Y \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.*

Αν μία ακολουθία (x_n) στον X συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$ ως προς την ασθενή τοπολογία, τότε λέμε ότι η (x_n) συγκλίνει ασθενώς στο x, και γράφουμε $x_n \rightharpoonup x$. Οι βασικές ιδιότητες σύγκλισης στην ασθενή τοπολογία συνοψίζονται στην εξής πρόταση.

Πρόταση 3.4. *Έστω X χώρος Banach. Τότε:*

i) *$x_n \rightharpoonup x$, αν και μόνο αν $f(x_n) \to f(x)$ για κάθε $f \in X^*$.*

ii) *Αν $x_n \to x$, τότε $x_n \rightharpoonup x$.*

iii) *Αν $x_n \rightharpoonup x$, τότε η (x_n) είναι φραγμένη, και $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.*

iv) *Αν $x_n \rightharpoonup x$ και $f_n \to f$ στον X^*, τότε $f_n(x_n) \to f(x)$.*

Απόδειξη. Για το (i), το ευθύ προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε $f \in X^*$ είναι συνεχής από τον (X, w) στο $\mathbb{R}$. Για το αντίστροφο, έστω U ασθενώς ανοικτό υποσύνολο του X με $x \in U$, τότε υπάρχει ένα σύνολο της μορφής (3.1) τέτοιο ώστε

$$V(x, f_1, \dots f_m, \varepsilon) \subseteq U.$$

Αφού $f(x_n) \to f(x)$ για κάθε $f \in X^*$, για $i = 1, \dots m$ υπάρχει $N_i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, αν $n \geq N_i$, τότε $|f_i(x_n) - f_i(x)| < \varepsilon$. Τότε, για $N = \max\{N_1, \dots N_M\}$, αν $n \geq N$ τότε $x_n \in U$, άρα $x_n \rightharpoonup x$.

Το (ii) έπεται από το (i).

Για το (iii), αφού το σύνολο $\{f(x_n) : f \in X^*\}$ είναι φραγμένο για κάθε $f \in X^*$, από την Πρόταση 2.25, η (x_n) είναι φραγμένη. Από το Πόρισμα 2.9, υπάρχει $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$ και $f(x) = \|x\|$. Τότε,

$$f(x_n) \leq \|f\| \|x_n\| = \|x_n\|,$$

και θεωρώντας τα $\liminf$ και στα δύο μέλη παίρνουμε το ζητούμενο.

Τέλος, το (iv) είναι συνδυασμός των προηγούμενων. □

Παρατήρηση 3.5. Οι αντίστοιχες ιδιότητες των παραπάνω εξακολουθούν να ισχύουν και για σύγκλιση δικτύων.

Παράδειγμα 3.6. Αν $x_n = e_n$ στον ℓ^2, τότε $x_n \rightharpoonup 0$. Πράγματι, αν $f \in (\ell^2)^*$, υπάρχει $y \in \ell^2$ με

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i,$$

επομένως $f(x_n) = y_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $y \in \ell^2$, $y_n \to 0$, άρα $f(x_n) \to 0$ για κάθε $f \in (\ell^2)^*$, και $x_n \rightharpoonup 0$.

Επομένως, βλέπουμε ότι η ανισότητα (iii) της Πρότασης 3.4 μπορεί να είναι γνήσια.

Παράδειγμα 3.7. Έστω $f_n \in L^2(0,1)$ η συνάρτηση

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n - n^2 x}, & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι $\|f_n\|_2 = 1$. Αν $g \in C_c(0,1)$, τότε

$$\int_0^1 f_n g \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Αν τώρα $h \in L^2(0,1)$, έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $g_\varepsilon \in C_c(0,1)$ τέτοια ώστε $\|h - g_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$. Τότε,

$$\left|\int_0^1 f_n h\right| \leq \left|\int_0^1 f_n(h - g_\varepsilon)\right| + \left|\int_0^1 f_n g_\varepsilon\right| \leq \|f_n\|_2 \|h - g_\varepsilon\|_2 + \left|\int_0^1 f_n g_\varepsilon\right|,$$

επομένως

$$\limsup \left|\int_0^1 f_n h\right| \leq \varepsilon\,.$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$, έχουμε ότι $\int_0^1 f_n h \to 0$. Αφού $(L^2(0,1))^* = L^2(0,1)$, έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{w} 0$ στον $L^2(0,1)$.

Πρόταση 3.8. *Αν ο X είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα, τότε η ασθενής τοπολογία και η τοπολογία που επάγεται από τη νόρμα ταυτίζονται.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.14, αρκεί να υποθέσουμε ότι ο X είναι ο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Επίσης, αρκεί να αποδείξουμε ότι η μοναδιαία μπάλα είναι ανοικτή στον $(\mathbb{R}^n, w)$. Όμως, αν $f_i(x) = x_i$ για $i = 1, \ldots n$, τότε $f_i \in (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)^*$, και

$$B = \{(x_1, \ldots x_n) : |x_i| < 1, i = 1, \ldots n\} = \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n : |f_i(x)| < 1\},$$

όπου το τελευταίο σύνολο είναι ανοικτό, από την (3.1). □

Οι χώροι άπειρης διάστασης έχουν εντελώς διαφορετική συμπεριφορά.

Παράδειγμα 3.9. Αν X απειροδιάστατος χώρος Banach, τότε η ασθενής κλειστότητα της μοναδιαίας **σφαίρας** του X είναι ίση με την κλειστή μοναδιαία **μπάλα** του X.

Ισοδύναμα, αν $B = \{x \in X : \|x\| < 1\}$, θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{int}_w(B \cup [\|x\| > 1]) = [\|x\| > 1]$. Αρχικά, το $[\|x\| > 1]$ είναι ανοικτό: αν $\|x\| > 1$, απο τη 2η γεωμετρική μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach (Θεώρημα 2.19) υπάρχουν $f \in X^*$, $a \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε $f(x) > a + \varepsilon$ και $f(y) < a - \varepsilon$ για κάθε y με $\|y\| \leq 1$. Τότε, το σύνολο

$$V_1 = V(x, f, \varepsilon) = \{z \in X : |f(z - x)| < \varepsilon\}$$

είναι ανοικτό στον (X, w) και είναι υποσύνολο του $[\|x\| > 1]$: αν $y \in V_1$, τότε

$$f(z) - a = f(x) + f(z - x) - a \geq f(x) - |f(z - x)| - a \geq 0,$$

άρα $f(z) \geq a$, επομένως $z \notin \overline{B}$. Επομένως το $[\|x\| > 1]$ είναι w-ανοικτό, το οποίο αποδεικνύει ότι

$$[\|x\| > 1] \subseteq \mathrm{int}_w(B \cup [\|x\| > 1]).$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, έστω U ανοικτό στον (X, w), με $U \subseteq B \cup [\|x\| > 1]$. Αν $U \cap B \neq \varnothing$, τότε υπάρχει $x \in U \cap B$. Το U είναι ανοικτό, άρα περιέχει ένα σύνολο της μορφής (3.1):

$$\bigcap_{i=1}^n \{x \in X : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon\} \subseteq U.$$

Θεωρούμε την απεικόνιση $T : X \to \mathbb{R}^m$ με

$$Tx = (f_1(x), \dots f_m(x))$$

για την οποία ισχύει ότι $\dim \ker T + \dim \operatorname{im} T = \dim X = \infty$, άρα $\dim \ker T = \infty$. Επομένως, υπάρχει $y \in X$ με $y \neq 0$ και $f_i(y) = 0$ για κάθε $i = 1, \dots n$. Τότε, $x + ty \in U$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, και η συνάρτηση $h(t) = \|x + ty\|$ είναι συνεχής στο $[0, \infty)$, με

$$h(0) = \|x\| < 1, \quad h(t) \geq t\|y\| - \|x\| \underset{t\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

άρα υπάρχει σημείο $z \in U$ με $\|z\| = 1$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα $U \cap B = \varnothing$, επομένως $U \subseteq B \cup [\|x\| > 1]$, και τελικά

$$\operatorname{int}_w(B \cup [\|x\| > 1]) \subseteq [\|x\| > 1].$$

Επομένως, σε απειροδιάστατους χώρους Banach, η ασθενής τοπολογία δεν ταυτίζεται **ποτέ** με την τοπολογία που επάγει η νόρμα.

Παράδειγμα 3.10. Αν X απειροδιάστατος χώρος Banach, τότε $\operatorname{int}_w B = \varnothing$. Πράγματι, η απόδειξη του προηγούμενου παραδείγματος μας δείχνει ότι, αν U ασθενώς ανοικτό σύνολο με $U \neq \varnothing$ και $U \subseteq B$, τότε το U είναι μη φραγμένο, το οποίο είναι άτοπο.

Παρατήρηση 3.11. Η ασθενής τοπολογία σε απειροδιάστατους χώρους Banach δεν είναι ποτέ μετρικοποιήσιμη, επομένως οι τοπολογικές ιδιότητες ενός τέτοιου χώρου δεν περιγράφονται από ακολουθίες, αλλά από *δίκτυα*. Το σημείο αυτό χρειάζεται προσοχή: ένα παράδειγμα μας δίνει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.12 (Schur). *Έστω (x_n) μία ακολουθία στον ℓ^1, με $x_n \rightharpoonup x$. Τότε $x_n \to x$.*

Το θεώρημα αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι η ασθενής τοπολογία και η ισχυρή τοπολογία του ℓ^1 δεν ταυτίζονται.

3.3 Κυρτά σύνολα, συνέχεια

Γενικά, τα ασθενώς κλειστά σύνολα είναι κλειστά ως προς τη νόρμα, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Αν όμως ένα σύνολο είναι κυρτό, οι δύο έννοιες είναι ισοδύναμες.

Θεώρημα 3.13. *Έστω X χώρος Banach, και $C \subseteq X$ κυρτό σύνολο. Το C είναι κλειστό ως προς τη νόρμα, αν και μόνο αν είναι ασθενώς κλειστό.*

Απόδειξη. Το αντίστροφο ισχύει γενικώς. Για το ευθύ, έστω $x \notin C$, τότε από τη 2η γεωμετρική μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach (Θεώρημα 2.19), υπάρχει $f \in X^*$, $a \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε

$$f(x) > a + \varepsilon, f(y) < a - \varepsilon \quad \forall y \in K.$$

Θέτουμε

$$U = \{z \in X : |f(z - x)| < \varepsilon\},$$

τότε το U είναι ασθενώς ανοικτό, $x \in U$ και $U \subseteq X \setminus C$. Άρα το $X \setminus C$ είναι ασθενώς ανοικτό, επομένως το C είναι ασθενώς κλειστό. $\square$

Ως πόρισμα, μία ακολουθία που συγκλίνει ασθενώς μπορεί να μετατραπεί σε ισχυρά συγκλίνουσα ακολουθία, με την εξής διαδικασία.

Πόρισμα 3.14 (Mazur). *Έστω X χώρος Banach, και (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \rightharpoonup x \in X$. Τότε, υπάρχει ακολουθία κυρτών γραμμικών συνδυασμών των x_n η οποία συγκλίνει στο x.*

Απόδειξη. Θέτουμε $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, τότε $x \in \mathrm{cl}_w A$, άρα και $x \in \mathrm{cl}_w(\mathrm{conv}\, A)$. Αφού το $\mathrm{conv}\, A$ είναι κυρτό, από το Θεώρημα 3.13, έχουμε ότι $x \in \overline{\mathrm{conv}\, A}$, που είναι το ζητούμενο. □

Το επόμενο θεώρημα αφορά τη σύνδεση μεταξύ ασθενούς συνέχειας και ισχυρής συνέχειας.

Θεώρημα 3.15. *Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Τότε, ο $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ είναι συνεχής, αν και μόνο αν ο $T : (X, w_X) \to (Y, w_Y)$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ είναι συνεχής, και έστω $f \in Y^*$. Τότε $f \circ T \in X^*$, άρα η $f \circ T : (X, w_X) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Από την Πρόταση 3.3, έπεται ότι ο $T : (X, w_X) \to (Y, w_Y)$ είναι συνεχής.

Αντιστρόφως, έστω ότι ο $T : (X, w_X) \to (Y, w_Y)$ είναι συνεχής. Έστω (x_n) μία ακολουθία στον X, με $x_n \to x \in X$ και $Tx_n \to y \in Y$. Τότε $x_n \rightharpoonup x$, και από την ασθενή συνέχεια του T, $Tx_n \rightharpoonup Tx$ στον Y. Αφού ο (Y, w_Y) είναι Hausdorff, έπεται ότι $Tx = y$, αρα ο T είναι συνεχής, από το θεώρημα κλειστού γραφήματος. □

Η προηγούμενη απόδειξη δείχνει ότι η συνέχεια $s \to s$ είναι ισοδύναμη με τη συνέχεια $w \to w$, και με αντίστοιχο τρόπο είναι ισοδύναμη με τη συνέχεια $s \to w$. Όμως, η συνέχεια $w \to s$ συμβαίνει σε πολύ λίγες περιπτώσεις.

Παρατήρηση 3.16. Έστω X χώρος Banach. Από το Θεώρημα 3.15, μία γραμμική απεικόνιση $f : (X, w) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, αν και μόνο αν $f \in X^*$.

3.4 Η ασθενής * τοπολογία

Έστω X χώρος με νόρμα, και X^* ο δυϊκός του. Στον X^* έχουμε μέχρι στιγμής δύο τοπολογίες:

i) Την ισχυρή τοπολογία, η οποία επάγεται από τη νόρμα τελεστή.

ii) Την ασθενή τοπολογία, η οποία είναι η μικρότερη τοπολογία για την οποία όλα τα $f \in X^{**}$ εξακολουθούν να είναι συνεχείς συναρτήσεις από τον X^* στο $\mathbb{R}$.

Θα ορίσουμε μία τρίτη τοπολογία στον X^*, η οποία είναι η εξής.

Ορισμός 3.17. Έστω χώρος με νόρμα. Η weak* τοπολογία είναι η μικρότερη τοπολογία στον X^* για την οποία ολα τα $x \in X \subseteq X^{**}$ παραμένουν συνεχείς συναρτήσεις από τον X^* στο $\mathbb{R}$.

Αφού ο X είναι εν γένει μικρότερος από τον X^{**}, η w^* θα είναι μικρότερη της w στον $X*$. Επίσης, όπως και στην περίπτωση της ασθενούς τοπολογίας, αν $f_0 \in X^*$, τα σύνολα

$$V(f_0, x_1, \dots x_n, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} \{f \in X^* : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon\}, \tag{3.2}$$

αποτελούν μία βάση περιοχών του f_0, όπου $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots x_n \in X$, και $\varepsilon > 0$.

Πρόταση 3.18. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε ο (X^*, w^*) είναι Hausdorff.*

Απόδειξη. Έστω $f_1, f_2 \in X^*$, με $f_1 \neq f_2$. Τότε υπάρχει $x \in X$ με $f_1(x) \neq f_2(x)$. Έστω ότι $f_1(x) < f_2(x)$, τότε $f_1(x) < f_2(x) + 2\,\varepsilon$ για κάποιο $\varepsilon > 0$. Τότε, τα σύνολα

$$V_1 = V(f_1, x, \varepsilon) = \{f \in X^* : |f(x) - f_1(x)| < \varepsilon\}, \quad V_2 = V(f_2, x, \varepsilon) = \{f \in X^* : |f(x) - f_2(x)| < \varepsilon\}$$

είναι ανοικτά και ξένα, με $f_1 \in V_1$ και $f_2 \in V_2$. □

Αν μία ακολουθία (f_n) στον X^* συγκλίνει σε κάποιο $f \in X^*$ ως προς την w^* τοπολογία, τότε λέμε ότι η (f_n) συγκλίνει weakly* στο f, και γράφουμε $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$. Η επόμενη πρόταση αποδεικνύεται όπως η Πρόταση 3.4.

Πρόταση 3.19. *Έστω X χώρος με νόρμα, (f_n) μία ακολουθία στον X^*, και $f \in X^*$. Τότε:*

i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, *αν και μόνο αν* $f_n(x) \to f(x)$ *για κάθε* $x \in X$.

ii) *Αν* $f_n \to f$, *τότε* $f_n \rightharpoonup x$, *και* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

iii) *Αν* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, *τότε η* (f_n) *είναι φραγμένη, και* $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

iv) *Αν* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *και* $x_n \to x$ *στον* X, *τότε* $f_n(x_n) \to f(x)$.

Παρατήρηση 3.20. Ο συνδυασμός ακολουθιών οι οποίες συγκλίνουν ασθενώς στον X^* και στον X δεν οδηγεί πάντα σε σύγκλιση. Για παράδειγμα, έστω (f_n) η ακολουθία του παραδείγματος 3.7. Ορίζουμε

$$F_n : L^2(0,1) \to \mathbb{R}, \quad F_n g = \int_0^1 f_n g.$$

Αφού $f_n \rightharpoonup 0$, έπεται ότι $F_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ και $F_n \rightharpoonup 0$ στον $(L^2(0,1))^*$. Όμως,

$$F_n f_n = \int_0^1 f_n^2 = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Παρατήρηση 3.21. Αν ο X είναι αυτοπαθής, τότε η κανονική εμφύτευση $E : X \to X^{**}$ είναι επί, επομένως η ασθενής τοπολογία και η weak* τοπολογία στον X^* ταυτίζονται. Ειδικότερα, αυτό συμβαίνει σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Όταν ο X είναι χώρος Banach, τότε τα μόνα γραμμικά συναρτησοειδή $x^{**} : X^* \to \mathbb{R}$ για τα οποία η απεικόνιση $x^{**} : (X^*, w^*) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής είναι ακριβώς τα στοιχεία του $X \subseteq X^{**}$. Η απόδειξη βασίζεται στο επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.22. *Έστω X γραμμικός χώρος, και $f, f_1, \dots f_n : X \to \mathbb{R}$ γραμμικά συναρτησοειδή, με*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \subseteq \ker f.$$

Τότε, υπάρχουν $c_1, \dots c_n \in \mathbb{R}$ με $f = c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$T : X \to \mathbb{R}^n, \quad Tx = (f_1(x), \dots f_n(x)).$$

Ορίζουμε επίσης την απεικόνιση $S : TX \to \mathbb{R}$, με $S(Tx) = f(x)$ για $x \in X$. Η S είναι καλά ορισμένη: αν $Tx_1 = Tx_2$, τότε $x_1 - x_2 \in \ker f_i$ για $i = 1, \ldots n$, άρα $x_1 - x_2 \in \ker f$ και $f(x_1) = f(x_2)$. Επίσης, η S είναι γραμμική απεικόνιση από το TX στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε μία γραμμική επέκταση $\tilde{S} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ της S, τότε υπάρχουν $c_1, \ldots c_n$ τέτοια ώστε

$$\tilde{S}y = c_1 y_1 + \ldots c_n y_n,$$

για $y \in \mathbb{R}^n$. Αρα, για κάθε $x \in X$,

$$f(x) = S(Tx) = c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x).$$

□

Πρόταση 3.23. *Έστω X χώρος Banach, και $x^{**} : (X^*, w^*) \to \mathbb{R}$ γραμμική και συνεχής απεικόνιση. Τότε, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $x^{**}(f) = f(x)$ για κάθε $f \in X^*$.*

Απόδειξη. Αφού $x^{**}(0) = 0$, υπάρχει μία βασική περιοχή V του 0 για την w^* για την οποία, αν $f \in V$, τότε $|x^{**}(f)| < 1$. Τότε, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots x_n \in X$, και $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε

$$g \in \bigcap_{i=1}^{n} \{f \in X^* : |f(x_i)| < \varepsilon\} \;\Rightarrow\; |x^{**}(g)| < 1.$$

Θέτουμε $x_i^{**} = Ex_i \in X^{**}$. Αν $x_i^{**}(f) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots n$, τότε $f(x_i) = 0$, άρα $Mf(x_i) = 0$ για κάθε $M > 0$. Τότε, $|x^{**}(Mf)| < 1$ για κάθε $M > 0$, άρα $x^{**}(f) = 0$. Άρα, από το Λήμμα 3.22, υπάρχουν $c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε, για κάθε $f \in X^*$,

$$x^{**}(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{**}(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right).$$

□

Πόρισμα 3.24. *Έστω $H \subseteq X^*$ υπερεπίπεδο στον X^* το οποίο είναι κλειστό ως προς την w^* τοπολογία. Τότε, υπάρχουν $x \in X$ και $a \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $H = \{f \in X^* : f(x) = a\}$.*

Απόδειξη. Υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $F : X^* \to \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$ με $H = [F = a]$. Θα αποδείξουμε ότι το F είναι w^* συνεχές στο 0.

Έστω $g \notin H$, τότε υπάρχει ανοικτό σύνολο που περιέχει το g και είναι ξένο προς το H. Επομένως, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots x_n \in X$, και $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} \{f \in X^* : |f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon\} \subseteq X^* \setminus H.$$

Ειδικότερα, αν $f \in V$, τότε $F(f) \neq a$. Αφού το V είναι κυρτό, ισχύει ότι $Ff > a$ ή $Ff < a$, για κάθε $f \in V$. Έστω ότι ισχύει η πρώτη περίπτωση, τότε για κάθε $h \in V - g$, αν $h = f - g$,

$$Fh = Ff - Fg > a - Fg,$$

άρα $F(-h) < Fg - a \leq |Fg - a|$. Επιπλέον, αφού το $V - g$ είναι συμμετρικό ως προς το 0,

$$Fh \leq |Fg - a|,$$

επομένως $|Fh| < |Fg - a|$ για κάθε $h \in V - g$. Αφού το $V - g$ είναι w^* ανοικτό σύνολο που περιέχει το 0, έπεται ότι η $F : (X^*, w^*) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Από την Πρόταση 3.23, υπάρχει $x \in X$ με $Ff = f(x)$ για κάθε $f \in X^*$, και έπεται το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 3.25. Το προηγούμενο πόρισμα μας δείχνει οτι, αν ένας χώρος X δεν είναι αυτοπαθής, τότε για $x^{**} \in X^{**} \setminus X$, το σύνολο $\ker x^{**} \subseteq X^*$ δεν είναι w^* κλειστό, αν και είναι κλειστό ως προς την ισχυρή τοπολογία, και ως προς την ασθενή τοπολογία. Αφού το προηγούμενο σύνολο είναι κυρτό, αυτό μας δείχνει ότι το Θεώρημα 3.13 δεν ισχύει για την w^* τοπολογία.

Έτσι, αν ένας χώρος δεν είναι αυτοπαθής, η w^* τοπολογία είναι αυστηρά μικρότερη από την w.

Για τα ακόλουθα, συμβολίζουμε με B_X την κλειστή μοναδιαία μπάλα του X.

Θεώρημα 3.26 (Banach-Alaoglou)**.** *Έστω X χώρος με νόρμα. Η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X^* είναι συμπαγής στην w^* τοπολογία.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον τοπολογικό χώρο

$$S = \prod_{x \in B_X} [-\|x\|, \|x\|]$$

με την τοπολογία γινόμενο. Από το Θεώρημα του Tychonoff, ο S είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος. Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση

$$T : B_{X^*} \to S, \quad f \mapsto (f(x))_{x \in B_X}.$$

Η T είναι καλά ορισμένη: αν $f \in B_{X^*}$ και $x \in B_X$, τότε

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\| \leq \|x\| \Rightarrow f(x) \in [-\|x\|, \|x\|]\,.$$

Επίσης, η T είναι 1-1: αν $Tf = Tg$, τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in B_X$, άρα $f = g$.

Η $T^{-1} : T(B_{X^*}) \to B_{X^*}$ είναι συνεχής: αν $(Tf_i)_{i \in I}$ είναι ένα δίκτυο στην $T(B_{X^*})$ με $Tf_i \to Tf \in T(B_{X^*})$ με την τοπολογία γινόμενο, άρα από τον ορισμό της σύγκλισης στο γινόμενο, $f_i(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X$. Επομένως, $f_i \xrightarrow{*} f$.

Μένει να δείξουμε το ότι το $T(B_{X^*}) \subseteq S$ είναι κλειστό σύνολο: τότε θα είναι και συμπαγές, και η B_{X^*} θα είναι w^* συμπαγές σύνολο, ως συνεχής εικόνα συμπαγούς. Έστω $Tf_i \to (a(x))_{x \in X}$, όπου το (f_i) είναι ένα δίκτυο στην B_{X^*}, τότε $f_i(x) \to a(x)$ για κάθε $x \in B_X$. Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \|x\| a(x/\|x\|) \text{ για } x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Μπορούμε να αποδείξουμε οτι η f είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και αν $\|x\| = 1$,

$$|f_i(x)| \leq \|x\|,$$

άρα θεωρώντας το όριο εχουμε ότι $\|f\| \leq 1$. Άρα $f_i \xrightarrow{*} f$, με $f \in B_{X^*}$, επομένως $Tf_i \to Tf$. □

Με βάση το προηγούμενο θεώρημα, η w^* συμπάγεια είναι ισοδύναμη με το να είναι ένα σύνολο w^* κλειστό και φραγμένο.

Πόρισμα 3.27. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε, ένα υποσύνολο $K \subseteq X^*$ είναι w^* συμπαγές, αν και μόνο αν είναι w^*-κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη. Για το ευθύ, αν ένα υποσύνολο ενός χώρου Hausdorff είναι συμπαγές, τότε είναι κλειστό. Επίσης, αν $x \in X$, τότε το σύνολο $\{|f(x)| : f \in K\}$ είναι συμπαγές (ως συνεχής εικόνα συμπαγούς), άρα είναι φραγμένο. Άρα, από την Πρόταση 2.24, το K είναι φραγμένο.

Για το αντίστροφο, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $K \subseteq MB_{X^*}$. Το MB_{X^*} είναι ομοιομορφικο με την κλειστή μοναδιαία μπάλα του X^*, άρα είναι w^* συμπαγές σύνολο, και το K είναι w^* κλειστό υποσύνολό του, άρα είναι w^* συμπαγές. □

Όταν ένας χώρος δεν είναι αυτοπαθής, δεν είναι απαραίτητο ότι η εικόνα του X στον X^{**} μέσω της κανονικής εμφύτευσης είναι πυκνό σύνολο στον X^{**}, ακόμη και με την ασθενή τοπολογία του X^{**}. Θεωρώντας όμως την w^* τοπολογία, η εικόνα $E(B_X)$ είναι πυκνή στην $B_{X^{**}}$. Η απόδειξη βασίζεται στο εξής λήμμα.

Λήμμα 3.28 (Helly). *Έστω X χώρος με νόρμα, $f_1, \dots f_n \in X^*$ και $a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

i) Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $x_\varepsilon \in X$ με $\|x_\varepsilon\| \leq 1$, τέτοιο ώστε $|f_k(x_\varepsilon) - a_k| < \varepsilon$, για $k = 1, \dots n$.

ii) Για κάθε $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$, ισχύει η ανισότητα

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right| \leq \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k\right\|.$$

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $L = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right| &\leq \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x_\varepsilon)\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (a_k - f_k(x_\varepsilon))\right| \\ &\leq \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k\right\| \|x_\varepsilon\| + \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (a_k - f_k(x_\varepsilon))\right| \\ &\leq \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k\right\| + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| = \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k\right\| + \varepsilon L.\end{aligned}$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, οπότε έπεται το ζητούμενο.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Θεωρούμε την απεικόνιση

$$T : X \to \mathbb{R}^n, \quad Tx = (f_1(x), \dots f_n(x)).$$

Για να ισχύει το (i), θέλουμε ισοδύναμα να δείξουμε ότι $(a_1, \dots a_n) \in \overline{T(B_X)}$. Έστω ότι αυτό δεν ισχύει, τότε από τη γεωμετρική μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach, υπάρχει $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ και $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$f(Tx) < a < f(a_1, \dots a_n),$$

για κάθε $x \in B_X$. Τότε, υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$y \cdot Tx < a < y \cdot (a_1, \dots a_n),$$

άρα

$$\sum_{k=1}^{n} y_k f_k(x) < a < \sum_{k=1}^{n} y_k a_k,$$

για κάθε $x \in B_X$. Επομένως,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} y_k f_k\right\| \leq a < \sum_{k=1}^{n} y_k a_k,$$

το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Θεώρημα 3.29 (Goldstine)**.** *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε,*

$$\overline{E(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}.$$

Απόδειξη. Έστω $w \in X^{**}$ με $\|w\|_{X^{**}} \leq 1$ και $U \subseteq X^{**}$ ένα w^* ανοικτό σύνολο. Θα δείξουμε ότι $E(B_X) \cap U \neq \varnothing$. Αρχικά, υπάρχουν $f_1, \dots f_n \in X^*$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε

$$w \in U_0 = \bigcap_{i=1}^{n} \{z \in X^{**} : |w(f_i) - z(f_i)| < \varepsilon\}.$$

Για να δείξουμε ότι $E(B_X) \cap U_0 \neq \varnothing$, θέλουμε να βρούμε $x \in X$ με $\|x\| \leq 1$ τέτοιο ώστε

$$|w(f_i) - f_i(x)| < \varepsilon, \quad i = 1 \dots n,$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με τη σχέση

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w(f_i) \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \right\|$$

για κάθε $\lambda_i \in \mathbb{R}$, από το Λήμμα 3.28. Όμως,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w(f_i) \right| = \left| w \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \right) \right| \leq \|w\| \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \right\|,$$

και το ζητούμενο έπεται. □

3.5 Αυτοπαθείς χώροι

Αν και η κλειστή μοναδιαία μπάλα του δϋικού ενός χώρου Banach X είναι πάντα w^* συμπαγής, δεν ισχύει το ίδιο και για την B_X στην ασθενή τοπολογία. Για παράδειγμα, το σύνολο

$$\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \ell^1$$

δεν είναι ασθενώς συμπαγές *(γιατί;)*.

Η συμπάγεια της κλειστής μοναδιαίας μπάλας ενός χώρου X είναι άμεσα συνδεδεμένη με την αυτοπάθεια του X.

Θεώρημα 3.30 (Kakutani)**.** *Ένας χώρος με νόρμα X είναι αυτοπαθής, αν και μόνο αν η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X είναι w συμπαγής.*

Απόδειξη. Αν ο X είναι αυτοπαθής, τότε μέσω της κανονικής εμφύτευσης, οι χώροι (B_X, w) και $(B_{X^{**}}, w^*)$ είναι ομοιομορφικοί. Από το Θεώρημα Banach-Alaoglou, ο $(B_{X^{**}}, w^*)$ είναι συμπαγής, άρα και η B_X είναι w συμπαγής.

Για το αντίστροφο, αφού η κανονική εμφύτευση $E : (B_X, w) \to (B_{X^{**}}, w^*)$ είναι συνεχής, το $E(B_X)$ είναι w^* συμπαγές υποσύνολο της $B_{X^{**}}$. Αφού η $B_{X^{**}}$ είναι w^* συμπαγής, αυτό σημαίνει ότι το $E(B_X)$ είναι w^* κλειστό υποσύνολο της $B_{X^{**}}$. Όμως, από το Θεώρημα Goldstine, η w^* κλειστότητα της $E(B_X)$ είναι η $B_{X^{**}}$, άρα $E(B_X) = B_{X^{**}}$, από όπου έπεται ότι η $E : X \to X^{**}$ είναι επί. □

Το προηγούμενο θεώρημα οδηγεί, με απλό τρόπο, στα εξής πορίσματα.

Πρόταση 3.31. *Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach, και $Y \subseteq X$ κλειστός υπόχωρος του X. Τότε ο Y είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη. Έστω w_X, w_Y οι ασθενείς τοπολογίες στον X, Y αντίστοιχα. Από το Θεώρημα 3.30, η B_X είναι w_X συμπαγές σύνολο. Η $B_Y \subseteq X$ είναι κυρτό υποσύνολο του X, το οποίο είναι κλειστό ως προς την ισχυρή τοπολογία, άρα από το Θεώρημα 3.13 η B_Y είναι w_X κλειστό σύνολο. Επομένως, αφού $B_Y \subseteq B_X$, η B_Y είναι w_X συμπαγές σύνολο. Όμως, στον Y, η w_X και η w_Y ταυτίζονται, επομένως η B_Y είναι w_Y συμπαγής. Άρα, από το Θεώρημα 3.30, ο Y είναι αυτοπαθής. □

Πρόταση 3.32. *Ένας χώρος Banach X είναι αυτοπαθής, αν και μόνο αν ο X^* είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο X είναι αυτοπαθής, και $\phi \in X^{***}$. Έστω επίσης $E : X \to X^{**}$ και $E' : X^* \to X^{***}$ οι κανονικές εμφυτεύσεις, και $\phi \in X^{***}$. Τότε η απεικόνιση $f : X \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \phi(Ex)$ είναι συνεχής, άρα $f \in E^*$. Αφού για κάθε $x^{**} \in X^{**}$ υπάρχει $x \in X$ με $Ex = x^{**}$, έχουμε ότι

$$\phi(x^{**}) = \phi(Ex) = f(x) = x^{**}(f) = E'f(x^{**}),$$

άρα $\phi = E'f$, και η E' είναι επί.

Αντιστρόφως, έστω ότι ο X^* είναι αυτοπαθής. Από τα προηγούμενα, ο X^{**} είναι αυτοπαθής, και ο $EX \subseteq X^{**}$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^{**}, ως προς την ισχυρή τοπολογία. Άρα, από την Πρόταση 3.31, ο EX είναι αυτοπαθής, άρα και ο X είναι αυτοπαθής. □

Μία επιπλέον ιδιότητα των αυτοπαθών χώρων είναι το ότι η απόσταση από κλειστό υπόχωρο "πιάνεται" πάντα.

Πρόταση 3.33. *Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach, $Y \subsetneq X$ γνήσιος, κλειστός υπόχωρος του X, και $x \in X \setminus Y$. Τότε, υπάρχει $y \in Y$ με $\|x - y\| = \mathrm{dist}(x, Y)$.*

Απόδειξη. Αρχικά, ο Y είπαι αυτοπαθής, από την Πρόταση 3.31. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $y_n \in Y$ με $\|x - y_n\| < d(x, Y) + \frac{1}{n}$. Αφού η (y_n) είναι φραγμένη στον και ο Y είναι αυτοπαθής, υπάρχει ασθενώς συγκλίνον υποδίκτυο: $y_i \to y$, όπου $y \in Y$. Τότε $\|x - y\| \geq d$, και από την Πρόταση 3.4, μπορούμε να δείξουμε ότι $\|x - y\| \leq d$. □

Πώς σχετίζεται η συμπάγεια με τη σύγκλιση ακολουθιών; Ιδανικά, θέλουμε η συμπάγεια να συνεπάγεται το ότι κάθε φραγμένη ακολουθία να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, αλλά αυτό δεν ισχύει πάντα.

Παράδειγμα 3.34. Έστω $X = \ell^\infty$. Για $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τα συναρτησοειδή

$$f_n : \ell^\infty \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x_n.$$

Τα f_n είναι φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή, με $\|f_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως, η (f_n) δεν έχει w^* συγκλίνουσα υπακολουθία *(γιατί;)*.

Παρατηρούμε ότι, από τον χαρακτηρισμό της συμπάγειας μέσω δικτύων και το Θεώρημα Banach-Alaoglou, η ακολουθία (f_n) έχει w^* συγκλίνον *υποδίκτυο*, αν και *δεν έχει* συγκλίνουσα υπακολουθία.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, η μη ύπαρξη συγκλίνουσας υπακολουθίας βασίζεται στο ότι ο ℓ^∞ είναι "πολύ μεγάλος". Θα αποδείξουμε ότι, σε "μικρότερους" χώρους, φραγμένες ακολουθίες έχουν w^* συγκλίνουσες υπακολουθίες - εδώ η έννοια κλειδί είναι αυτή της διαχωρισιμότητας.

3.6 Διαχωρισιμότητα

Υπενθυμίζουμε ότι ένας τοπολογικός χώρος είναι διαχωρίσιμος, αν έχει αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο. Στο πλαίσιο χώρων Banach, ένας χώρος X είναι διαχωρίσιμος, αν υπάρχει αριθμήσιμο υποσύνολο του X το οποίο να είναι πυκνό στον X ως προς την ισχυρή τοπολογία.

Αρχικά, αφού περιμένουμε ότι ο X^* είναι "μεγαλύτερος" του X, έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.35. *Έστω X χώρος με νόρμα. Αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος, τότε ο X είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Έστω $A = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του X^*. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n \in X$ με $\|x_n\| = 1$ και $|f_n(x_n)| > \frac{1}{2}\|f_n\|$. Θέτουμε

$$Y = \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}},$$

τότε ο Y είναι διαχωρίσιμος υπόχωρος του X. Θα δείξουμε ότι $Y = X$: έστω $f \in X^*$ με $f(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$, και $\varepsilon > 0$. Αφού το A είναι πυκνό στον X^*, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|f_{n_0} - f\| < \varepsilon$. Τότε,

$$\frac{1}{2}\|f_{n_0}\| < |f_{n_0}(x_{n_0})| = |f_{n_0}(x_{n_0}) - f(x_{n_0})| \leq \|f_{n_0} - f\|\|x_{n_0}\| < \varepsilon,$$

άρα $\|f_{n_0}\| < 2\,\varepsilon$, και

$$\|f\| \leq \|f_{n_0} - f\| + \|f_{n_0}\| < 3\,\varepsilon\,.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα $f = 0$. Επομένως, από την Πρόταση 2.10, $Y = X$. □

Υπενθυμίζεται ότι ένα υποσύνολο ενός διαχωρίσιμου μετρικού χώρου ειναι πάντα διαχωρίσιμος χώρος, αλλά αυτό δεν ισχύει γενικά σε τοπολογικούς χώρους.

Το επόμενο θεώρημα συνδέει τη διαχωρισιμότητα του X με τη μετρικοποιησιμότητα της μοναδιαίασς μπάλας του δϋικου.

Θεώρημα 3.36. *Έστω X χώρος με νόρμα. Ο X είναι διαχωρίσιμος, αν και μόνο αν η (B_{X^*}, w^*) είναι μετρικοποιήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο X είναι διαχωρίσιμος, και $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο της B_X. Στον X^* ορίζουμε τη μετρική

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g(x_n) - f(x_n)|}{2^n}$$

Θα δείξουμε ότι η προηγούμενη μετρική στην B_{X^*} επάγει την w^* τοπολογία.

Έστω $f \in B_{X^*}$, $\varepsilon > 0$, $x \in X$ και

$$V = \{g \in B_{X^*} : |g(x) - f(x)| < \varepsilon\}$$

ένα w^* ανοικτό υποσύνολο της B_{X^*} το οποίο περιέχει το f. Θα βρούμε $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$\{g \in B_{X^*} : d(f, g) < r\} \subseteq V.$$

Αρχικά, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|x_{n_0} - x\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Επιλέγοντας $r = 2^{-n_0-1}\,\varepsilon$, έχουμε ότι

$$\frac{|g(x_{n_0}) - f(x_{n_0})|}{2^{n_0}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g(x_{n_0}) - f(x_{n_0})|}{2^n} < r,$$

άρα $|g(x_{n_0}) - f(x_{n_0})| < \frac{\varepsilon}{2}$. Επομένως,

$$|g(x) - f(x)| \leq |g(x_{n_0} - x) - f(x_{n_0} - x)| + |g(x_{n_0}) - f(x_{n_0})| < \|g - f\| \|x_{n_0} - x\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon\,.$$

Έστω τώρα $f \in B_{X^*}$ και $r > 0$. Θα βρούμε $\varepsilon > 0$ και $y_1, \dots y_n \in X$, με

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{g \in B_{X^*} : |g(y_i) - f(y_i)| < \varepsilon\} \subseteq \{g \in B_{X^*} : d(f, g) < r\}.$$

Για $g \in B_{X^*}$ και $N \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g(x_n) - f(x_n)|}{2^n} &\leq \sum_{n=1}^{N} \frac{|g(x_n) - f(x_n)|}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\|f - g\| \|x_n\|}{2^n} \\ &\leq \sum_{n=1}^{N} \frac{|g(x_n) - f(x_n)|}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{1-n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{|g(x_n) - f(x_n)|}{2^n} + 2^{1-N}. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ με $2^{1-N} < \frac{r}{2}$, θέτουμε $y_i = x_i$ για $i = 1, \dots N$ και $\varepsilon = r/2$. Τότε, αν

$$|g(y_i) - f(y_i)| < \varepsilon,\ \ i = 1, \dots N,$$

έχουμε ότι

$$d(f,g) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{|g(x_n) - f(x_n)|}{2^n} + 2^{1-N} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^n} + 2^{1-N} < r.$$

Επομένως, αν ο X είναι διαχωρίσιμος, τότε οι τοπολογίες στους (X^*, w^*), (X^*, d) ταυτίζονται.

Αντιστρόφως, έστω ώστε ο (X^*, w^*) είναι μετρικοποιήσιμος, με μετρική ρ. Για $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τα σύνολα

$$U_n = \left\{ f \in X^* : \rho(f, 0) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Τα U_n είναι ανοικτά και $0 \in U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επομένως υπάρχουν $N_n \in \mathbb{N}$, $x_{n,j}$ για $j = 1, \dots N_n$ και $\varepsilon_n > 0$, τέτοια ώστε

$$\bigcap_{j=1}^{N_n} \{f \in B_{X^*} : |f(x_{n,j})| < \varepsilon_n\} \subseteq U_n,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Το σύνολο

$$A = \{x_{i,j} : i \in \mathbb{N}, j = 1, \dots N_i\}$$

είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του X: ισχυριζόμαστε ότι είναι πυκνό υποσύνολο του X. Πράγματι, αν $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(y) = 0$ για κάθε $y \in A$, τότε $f \in U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\rho(f, 0) < \frac{1}{n},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $f \equiv 0$, άρα το $A \subseteq X$ είναι πυκνό. $\square$

Ισχύει επίσης και το "δϋικο" θεώρημα.

Θεώρημα 3.37. *Έστω X χώρος Banach. Ο X^* είναι διαχωρίσιμος, αν και μόνο αν η (B_X, w) είναι μετρικοποιήσιμη.*

Με βάση το Θεώρημα 3.36, οδηγούμαστε στην εξής Πρόταση.

Πρόταση 3.38. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα, και (f_n) μία φραγμένη ακολουθία στον X^*. Τότε η (f_n) έχει w^* συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Υπάρχει $M > 0$ τετοιο ώστε $\|f_n\| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα 3.36, ο (MB_{X^*}, w^*) είναι μετρικοποιήσιμος και συμπαγής, και το ζητούμενο έπεται. □

Στην περίπτωση της ασθενούς τοπολογίας, μπορούμε να εξάγουμε συγκλίνουσες υπακολουθίες σε κάθε αυτοπαθή χώρο, χωρίς κάποια υπόθεση διαχωρισιμότητας.

Πρόταση 3.39. *Έστω X αυτοπαθής χώρος, και (x_n) μία φραγμένη ακολουθία. Τότε η (x_n) έχει w συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Θέτουμε $Y = \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$, τότε ο Y είναι κλειστός και διαχωρίσιμος υπόχωρος του X. Από το Θεώρημα 3.31, ο Y είναι αυτοπαθής, άρα ο Y^{**} είναι ισόμορφος με τον Y, επομένως είναι διαχωρίσιμος. Από την Πρόταση 3.35, ο * είναι διαχωρίσιμος, άρα από το Θεώρημα 3.37, η B_Y είναι μετρικοποιήσιμη. Επομένως, υπάρχει w- συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}): $f(x_{k_n}) \to f(x)$ για κάθε $f \in Y^*$. Άρα, από το Θεώρημα Hahn-Banach, $g(x_{k_n}) \to g(x)$ για κάθε $g \in X^*$, επομένως $x_{k_n} \rightharpoonup x$ στον X. □

Παράδειγμα 3.40. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό, και (f_n) μία φραγμένη ακολουθία στον $L^2(\Omega)$. Αφού ο L^2 είναι αυτοπαθής, από την Πρόταση 3.39, υπάρχει $f \in L^2(\Omega)$ και υπακολουθία (f_{k_n}), τέτοια ώστε, για κάθε $g \in L^2(\Omega)$,

$$\int_\Omega f_{k_n} g \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega fg.$$

Παράδειγμα 3.41. Αν (f_n) είναι μία φραγμένη ακολουθία στον $L^1(\mathbb{R}^d)$, δεν είναι απαραίτητο ότι υπάρχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία. Ένας τρόπος για να εξάγουμε συγκλίνουσα υπακολουθία είναι να "μεγαλώσουμε" τον χώρο: θεωρούμε τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων που μηδενιζονται στο άπειρο, $C_0(\mathbb{R}^n)$, ο οποίος έχει δϋικό τον χώρο τα προσημασμένα μέτρα Radon, $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$, όπως στο Παράδειγμα 2.35. Κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ορίζει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $C_0(\mathbb{R}^d)$, μέσω της σχέσης

$$T_f : C_0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \quad T_f g = \int_{\mathbb{R}^n} fg.$$

Ο $C_0(\mathbb{R}^n)$ είναι διαχωρίσιμος, άρα από την Πρόταση 3.38, υπάρχει υπακολουθία (f_{k_n}) και $\mu \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $T_{f_{k_n}} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$. Δηλαδή, για κάθε $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{k_n} g \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^n} g\, d\mu.$$

3.7 Ομοιόμορφα κυρτοί χώροι

Ένας χώρος Banach X ονομάζεται ομοιόμορφα κυρτός, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, αν $x, y \in X$ με $\|x\| = \|y\| = 1$ και $\|x - y\| > \varepsilon$, τότε $\|(x + y)/2\| < 1 - \delta$.

Παράδειγμα 3.42. Ο $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ είναι ομοιόμορφα κυρτός, αλλά οι $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι ομοιόμορφα κυρτοί.

Η ομοιόμορφη κυρτότητα είναι μία γεωμετρική ιδιότητα του X: φαινομενικά, δεν έχει σχέση με την τοπολογία του . Ένα αξιοσημείωτο γεγονός είναι ότι η γεωμετρική αυτή ιδιότητα συνεπάγεται την τοπολογική ιδιότητα της αυτοπάθειας.

Θεώρημα 3.43 (Milman-Pettis)**.** *Κάθε ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη. Έστω $\phi \in X^{**}$ με $\|\phi\| = 1$, και θέλουμε να δείξουμε ότι $\phi \in E(X)$. Η εικόνα $E(X) \subseteq X^{**}$ είναι κλειστό σύνολο (στην ισχυρή τοπολογία του X^{**}), άρα αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ με

$$\|\phi - Ex\| \leq \varepsilon\,.$$

Έστω $\varepsilon > 0$, και θεωρούμε το $\delta > 0$ από τον ορισμό της ομοιόμορφης κυρτότητας. Αφού $\|\phi\| = 1$, υπάρχει $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$ και $\phi(f) > 1 - \delta/2$. Θεωρούμε το σύνολο

$$U = \{\xi \in B_{X^{**}} : |\xi(f) - \phi(f)| < \delta/2\},$$

το οποίο ειναι w^* ανοικτό στην $B_{X^{**}}$ και περιέχει το ϕ. Από το Θεώρημα του Goldstine (Θεώρημα 3.29), η $E(B_X)$ είναι πυκνή στην $B_{X^{**}}$, άρα υπάρχει $x \in B_X$ με $Ex \in U$. Θα αποδείξουμε ότι $\|\phi - Ex\| \leq \varepsilon$.

Έστω ότι αυτό δεν ισχύει, τότε $\|\phi - Ex\| > \varepsilon$, άρα

$$\phi \in W := (B_\varepsilon(Ex))^c.$$

Το W είναι w^* ανοικτό υποσύνολο της $B_{X^{**}}$ με $\phi \in W$, άρα το $U \cap W$ είναι μία περιοχή που περιέχει το ϕ. Από το Θεώρημα Goldstine, υπάρχει $y \in B_X$ με $Ey \in U \cap W$. Αφού $Ex, Ey \in U$, έχουμε ότι

$$|f(x) - \phi(f)| < \delta/2, \quad |f(y) - \phi(f)| < \delta/2,$$

άρα

$$2\phi(f) < f(x) + f(y) + \delta \leq \|x + y\| + \delta.$$

Αφού $\phi(f) > 1 - \delta/2$, έχουμε ότι $\|\frac{x+y}{2}\| > 1 - \delta$, και από την ομοιόμορφη κυρτότητα, $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Όμως, $Ey \in W$, άρα $\|Ex - Ey\| > \varepsilon$, το οποίο είναι άτοπο. □

Δείχνουμε επίσης την εξής ιδιότητα των ομοιόμορφα κυρτών χώρων.

Θεώρημα 3.44. *Έστω X ένας ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach, και (x_n) μία ακολουθία στον X, με $x_n \rightharpoonup x$, και*

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Τότε $x_n \to x$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $x \neq 0$. Έστω $t_n = \max\{\|x_n\|, \|x\|\}$, και θέτουμε $y_n = x_n/t_n, y = x/\|x\|$. Τότε $t_n \to \|x\|$ και $x_n \rightharpoonup x$, άρα $y_n \rightharpoonup y$. Επομένως,

$$1 = \|y\| \leq \liminf \left\| \frac{y_n + y}{2} \right\|,$$

και αφού $\|y_n\|, \|y\| \leq 1$, έχουμε ότι $\left\|\frac{y_n+y}{2}\right\| \to 1$. Από την ομοιόμορφη κυρτότητα, έχουμε ότι $y_n \to y$, άρα $x_n \to x$. □

4 Χώροι Hilbert

4.1 Εισαγωγή

Έστω H ένας γραμμικός χώρος (πάνω από το $\mathbb{R}$), και $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ μία απεικόνιση. Η απεικόνιση αυτή ονομάζεται *εσωτερικό γινόμενο*, αν ισχύουν οι εξής ιδιότητες.

i) Αν $x \in H$ τότε $\langle x, x \rangle \geq$, και $\langle x, x \rangle = 0$ αν και μονο αν $x = 0$.

ii) (Διγραμμικότητα) Για κάθε $x, y, z \in H$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$.

iii) (Συμμετρία) Για κάθε $x, y \in H$, τότε $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

Συμβολίζουμε πολλες φορές το εσωτερικό γινόμενο και ως $\langle x, y \rangle = x \cdot y$. Στην περίπτωση που ο χώρος είναι πάνω από το $\mathbb{C}$, δεν απαιτούμε συμμετρία, αλλά τη σχέση $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ για κάθε $x, y \in H$.

Στους χώρους Hilbert ορίζεται η έννοια της *καθετότητας*: λέμε ότι τα $x, y \in H$ είναι κάθετα, και γράφουμε $x \perp y$, αν $\langle x, y \rangle = 0$.

Πρόταση 4.1. *Έστω $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwartz: για κάθε $x, y \in H$,*

$$\langle x, y \rangle \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Απόδειξη. Αναπτύσσουμε τη σχέση $\langle \langle x, x \rangle y - \langle x, y \rangle x, \langle x, x \rangle y - \langle x, y \rangle x \rangle \geq 0$. □

Αν έχουμε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, τότε ορίζεται με φυσιολογικό τρόπο μία νόρμα μέσω της σχέσης $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Η νόρμα αυτή επάγει μία μετρική, και μπορούμε ξανά να συζητάμε για τις τοπολογικές ιδιότητες που επάγονται από αυτή τη νόρμα. Όμως, δεν ισχύει ότι κάθε νόρμα προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο.

Λήμμα 4.2 (Κανόνας παραλληλογράμμου)**.** *Έστω $(X, \| \cdot \|)$ χώρος με νόρμα πάνω από το $\mathbb{R}$. Τότε η $\| \cdot \|$ προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο, αν και μόνο αν, για κάθε $x, y \in X$,*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Ορισμός 4.3. Ένας πλήρης γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται *χώρος Hilbert*.

Παράδειγμα 4.4. Ο $\mathbb{R}^n$ με το κλασσικό εσωτερικό γινόμενο είναι χώρος Hilbert. Επίσης, οι χώροι ℓ^2 και $L^2(\Omega)$ είναι χώροι Hilbert: στην περίπτωση του ℓ^2, το εσωτερικό γινόμενο είναι το

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

ενώ στην περίπτωση του $L^2(\Omega)$, το εσωτερικό γινόμενο είναι το

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} fg,$$

όπου το ολοκλήρωμα θεωρείται ως προς το μέτρο Lebesgue στο Ω. Το ότι οι προηγούμενες ποσότητες είναι καλά ορισμένες προκύπτει από την ανισότητα Cauchy-Schwartz.

Επιπλέον, αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, τότε ο $L^p(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert αν και μόνο αν $p = 2$.

Παράδειγμα 4.5. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, και $C_c^\infty(\Omega)$ το σύνολο των συναρτήσεων με συμπαγή φορέα στο Ω οι οποίες είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες στο Ω. Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega (uv + \nabla u \nabla v).$$

Ο $C_c^\infty(\Omega)$ με αυτό το εσωτερικό γινόμενο δεν είναι πλήρης. Όμως, η πλήρωση ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο είναι χώρος Hilbert, και στη συγκεκριμένη περίπτωση η πλήρωση του $C_c^\infty(\Omega)$ μας δίνει τον χώρο Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$.

4.2 Προβολές, Δϋικός χώρος

Μία από τις βασικές ιδιότητες των χώρων Hilbert είναι ότι η απόσταση σημείου από κλειστό και κυρτό σύνολο πάντα λαμβάνεται. Η ιδιότητα αυτή ισχύει γενικότερα σε αυτοπαθείς χώρους, αλλά η έννοια της καθετότητας σε χωρους Hilbert οδηγεί σε διαφορετική απόδειξη.

Πρόταση 4.6 (Προβολή σε κλειστό, κυρτό σύνολο)**.** *Έστω H χώρος Hilbert, και $K \subseteq H$ μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του H. Τότε, για κάθε $x \in H$ υπάρχει μοναδικό $y \in K$ τέτοιο ώστε*

$$\|x - y\| = \text{dist}(x, K).$$

Το y ονομάζεται η προβολή του x στο K, και συμβολίζεται ως $y = P_K x$. Επιπλέον, το y χαρακτηρίζεται από την εξής ιδιότητα:

$$y \in K, \quad \textit{και} \quad \langle y - z, y - x\rangle \le 0 \quad \textit{για κάθε } z \in K. \tag{4.1}$$

Απόδειξη. Έστω $x \in H$, τότε υπάρχει (y_n) στο K τέτοια ώστε

$$\|x - y_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \text{dist}(x, K).$$

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, για $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 &= \|2x - y_n - y_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 \\ &= 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 \ge 4\,\text{dist}(x, K)^2 + \|y_n - y_m\|^2, \end{aligned}$$

αφού $\frac{y_n+y_m}{2} \in K$. Επομένως,

$$\|y_n - y_m\|^2 \le 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\,\text{dist}(x, K)^2,$$

το οποίο δείχνει ότι η (y_n) είναι Cauchy. Αφού ο H είναι χώρος Hilbert και το K είναι κλειστό, θα έχουμε ότι $y_n \to y \in K$, και τότε

$$\|x - y\| = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \text{dist}(x, K).$$

Το προηγούμενο y είναι μοναδικό, γιατί αν $y_1, y_2 \in K$ με $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \text{dist}(x, K)$, τότε από τον κανονα του παραλληλογράμμου,

$$\|y_1 - y_2\|^2 + 4\,\text{dist}(x, K)^2 \le \|y_1 - y_2\|^2 + 4\left\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\right\|^2 = 2\|x - y_1\|^2 + 2\|x - y_2\|^2 = 4\,\text{dist}(x, K)^2,$$

άρα $y_1 = y_2$.

Δείχνουμε τώρα οτι το y ικανοποιεί την (4.1): αν $z \in K$, τότε για κάθε $t \in (0,1)$,

$$\|x-y\|^2 \leq \|x-tz-(1-t)y)\|^2,$$

και από τη διαφορά τετραγώνων του εσωτερικού γινομένου,

$$\langle x-y+x-tz-(1-t)y, x-y-x+tz+(1-t)y\rangle \leq 0,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\langle 2x-tz-(2-t)y, t(z-y)\rangle \leq 0,$$

για κάθε $t \in (0,1)$, άρα και $\langle 2x-tz-(2-t)y, z-y\rangle \leq 0$ για $t \in (0,1)$. Άρα, αφηνοντας το $t \to 0^+$,

$$\langle 2x-2y, z-y\rangle = \lim_{t\to 0^+}\langle 2x-tz-(2-t)y, z-y\rangle \leq 0,$$

που είναι το ζητούμενο.

Τέλος, δείχνουμε ότι το y που ορίζεται από την (4.1) είναι μοναδικό, άρα θα πρέπει να είναι η προβολή του x στο K: αν $y_1, y_2 \in K$ με $\langle y_i - z, y_i - x\rangle \leq 0$ για κάθε $z \in K$ και $i = 1,2$, τότε

$$\langle y_1-y_2, y_1-x\rangle \leq 0, \quad \langle y_2-y_1, y_2-x\rangle \leq 0,$$

και προσθέτοντας

$$\langle y_1-y_2, y_1-y_2\rangle = \langle y_1-y_2, y_1-x\rangle + \langle y_2-y_1, y_2-x\rangle \leq 0,$$

άρα $y_1 = y_2$. □

Από την σχέση (4.1), μπορούμε να δούμε ότι

$$\|P_K x - P_K y\| \leq \|x-y\| \tag{4.2}$$

για κάθε $K \subseteq H$ κλειστό και κυρτό, και για κάθε $x, y \in H$.

Πόρισμα 4.7. *Έστω H χώρος Hilbert, και $Y \subseteq H$ κλειστός υπόχωρος του H. Αν $x \in H$, το $P_Y x$ χαρακτηρίζεται από τις ιδιότητες $P_Y x \in Y$ και $\langle x - P_Y x, z\rangle = 0$ για κάθε $z \in Y$. Επιπλέον, ο τελεστής $P_Y : H \to Y$ είναι γραμμικός και φραγμένος τελεστής.*

Απόδειξη. Αν $w \in Y$, τότε για $z = w+y \in Y$ στην (4.1), έχουμε ότι $\langle w, y-x\rangle \leq 0$. Ομοίως, $-w \in Y$, άρα τελικά $\langle x-y, w\rangle = 0$ για κάθε $w \in Y$. Το ότι ο P_Y είναι γραμμικός τελεστής έπεται από τον προηγούμενο χαρακτηρισμό, και το ότι είναι φραγμένος προκύπτει από την (4.2). □

Αν ο H είναι χώρος Hilbert και $y \in H$, τότε το συναρτησοειδές

$$f_y : H \to \mathbb{R}, \quad f_y x = \langle x, y\rangle$$

είναι γραμμικό, φραγμένο, και έχει νόρμα ίση με $\|y\|$. Ένα από τα πιο σημαντικά θεωρήματα σε χώρους Hilbert είναι ότι αυτά τα συναρτησοειδή περιγράφουν όλο τον H^*.

Θεώρημα 4.8 (Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz)**.** *Έστω H χώρος Hilbert και $f \in H^*$. Τότε υπάρχει μοναδικό $y \in H$ τέτοιο ώστε $f = f_y$.*

Απόδειξη. Έστω $Y = \ker f$, τότε ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του H. Θεωρούμε ότι $Y \neq H$ (διαφορετικά επιλέγουμε $y = 0$), και έστω $x_0 \in X \setminus Y$. Από το Πόρισμα 4.7, υπάρχει $y_0 \in Y$ τέτοιο ώστε $x_0 - y_0 \perp Y$. Τότε $y_0 \neq x_0$, και το $z_0 = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$ έχει νόρμα 1 και είναι κάθετο στον Y. Αν τώρα $x \in H$, τότε

$$f(fz_0 \cdot x) = f(fx \cdot z_0) \Rightarrow fz_0 \cdot x - fx \cdot z_0 \in \ker f,$$

επομένως

$$\langle fz_0 \cdot x - fx \cdot z_0, z_0 \rangle = 0 \Rightarrow fx = \left\langle \frac{fz_0 \cdot z_0}{\langle z_0, z_0 \rangle}, x \right\rangle.$$

Η μοναδικότητα έπεται από τον ορισμό του f_y: αν $f_{y_1} = f_{y_2}$, τότε $\langle y_1, x \rangle = \langle y_2, x \rangle$ για κάθε $x \in H$, και επιλέγοντας $x = y_1 - y_2$ έπεται το ζητούμενο. □

Το προηγούμενο θεώρημα μας δείχνει ότι μπορούμε πάντα να ταυτίσουμε έναν χώρο Hilbert με τον δϋικό του.

Πόρισμα 4.9. *Έστω H χώρος Hilbert. Τότε, η απεικόνιση $T : H \to H^*$ με $y \mapsto f_y$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός.*

Με αντίστοιχο τρόπο, έχουμε την εξής Πρόταση.

Πρόταση 4.10. *Κάθε χώρος Hilbert είναι αυτοπαθής.*

4.3 Ορθοκανονικές βάσεις

Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ένα σύνολο $\{e_i : i \in I\}$ ονομάζεται ορθοκανονικό, αν $\|e_i\| = 1$ για κάθε $i \in I$, και $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ για $i \neq j$. Είναι απλό να δείξουμε ότι κάθε ορθοκανονικό σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Ορισμός 4.11. Έστω H χώρος Hilbert, και A ένα ορθοκανονικό σύνολο. Το A ονομάζεται ορθοκανονική βάση του H, αν είναι μεγιστικό ως προς τη σχέση εγκλεισμού.

Από το Λήμμα του Zorn, κάθε χώρος Hilbert έχει ορθοκανονική βάση. Αν A είναι μία ορθοκανονική βάση του H, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι $H = \overline{\operatorname{span} A}$.

Λήμμα 4.12. *Έστω $\{e_1, \dots e_n\}$ ένα ορθοκανονικό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert H. Για κάθε $x \in H$,*

$$\operatorname{dist}(x, \operatorname{span} e_1, \dots e_n)^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 4.7, αν Px η προβολή του x στον $\operatorname{span} e_1, \dots e_n$, τότε

$$\langle x - Px, e_i \rangle = 0, \ i = 1, \dots n,$$

άρα $\langle Px, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle$. Αφού $Px \in \operatorname{span}\{e_1, \dots e_n\}$, υπάρχουν $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ με $Px = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Αφού το $\{e_1, \dots e_n\}$ είναι ορθοκανονικό, έπεται ότι $\lambda_i = \langle x, e_i \rangle$ για κάθε i, το οποίο δείχνει την πρώτη ισότητα. Για τη δεύτερη ισότητα, γράφουμε

$$\begin{aligned}\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\right\|^2 &= \left\langle x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k, x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\right\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2\left\langle \sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k, x\right\rangle + \left\|\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\right\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2.\end{aligned}$$

□

Ως πόρισμα, παίρνουμε την ανισότητα Bessel.

Πρόταση 4.13 (Ανισότητα Bessel)**.** *Έστω* $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *ένα ορθοκανονικό υποσύνολο του* H*. Τότε, για κάθε* $x \in H$*,*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Αν ένας χώρος έχει αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση, τότε είναι διαχωρίσιμος *(γιατί;)*. Ισχύει όμως και το αντίστροφο.

Πρόταση 4.14. *Έστω* H *απειροδιάστατος, διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση* $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *του* H*, και για κάθε* $x \in H$*,*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n.$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα του Zorn, υπάρχει ορθοκανονική βάση . Αν η είναι υπεραριθμήσιμη, τότε $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ για κάθε i, j, το οποίο είναι άτοπο λόγω της διαχωρισιμότητας του H. Άρα η H είναι αριθμήσιμη, η οποία είναι επίσης άπειρη, λόγω της άπειρης διάστασης του H.

Έστω τώρα $x \in H$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχουν $N \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \dots \lambda_N \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right\| < \varepsilon\,.$$

Τότε, για $M > N$, από το Λήμμα 4.12,

$$\begin{aligned}\left\|x-\sum_{k=1}^{M}\langle x,e_k\rangle e_k\right\| &= \mathrm{dist}(x, \mathrm{span}\{e_1,\dots e_M\}) \leq \mathrm{dist}(x, \mathrm{span}\{e_1,\dots e_N\}) \\ &\leq \left\|x-\sum_{k=1}^{M}\lambda_k e_k\right\| < \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Επομένως $\sum_{k=1}^{M}\langle x,e_k\rangle e_k \xrightarrow[M\to\infty]{} x$. □

Πρόταση 4.15. *Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του H. Τότε, για κάθε $x \in H$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2.$$

Απόδειξη. Αν $\in \mathbb{N}$, από το Λήμμα 4.12 και την Πρόταση 4.14,

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \operatorname{dist}(x, \operatorname{span} e_1, \dots e_N) = \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n \right\|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

□

Ισχύεθι επίσης και το αντίστροφο της προηγούμενης πρότασης.

Τέλος, αποδεικνύουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 4.16 (Riesz-Fischer)**.** *Αν H απειροδιάστατος, διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, τότε ο H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ^2.*

Απόδειξη. Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ μία ορθοκανονική βάση του H. Ορίζουμε τον τελεστή $T : H \to \ell^2$, με

$$Tx = \left(\langle x, e_n\rangle\right)_{n=1}^{\infty}.$$

Δείχνουμε τότε ότι ο T είναι φραγμένη γραμμική ισομετρία επί, από τον H στον ℓ^2. □

4.4 Το Θεώρημα Lax-Milgram

Το γεγονός ότι το εσωτερικό γινόμενο περιγράφει όλα τα συναρτησοειδή στον H^* επεκτείνεται και στο πλαίσιο συγκεκριμένων διγραμμικών μορφών.

Μία διγραμμική μορφή είναι μία συνάρτηση $B : H \times H \to \mathbb{R}$, η οποία είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή. Μία τέτοια μορφή ονομάζεται συνεχής, αν υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x, y \in H$,

$$B(x, y) \leq C\|x\|\|y\|.$$

Για την περιγραφή των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών μέσω διγραμμικών μορφών, θα πρέπει οι μορφές αυτές να είναι μη εκφυλισμένες: για παράδειγμα, η μορφή $B(x, y) = 0$ περιγράφει μόνο το μηδενικό συναρτησοειδές. Στις εφαρμογές, μία κλάση μη εκφυλισμένων μορφών οι οποίες είναι σχετικά εύκολο να ελεγχθούν είναι οι coercive μορφές, για τις οποίες υπάρχει ένα $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε

$$B(x, x) \geq \lambda\|x\|^2, \quad \text{για κάθε } x \in H.$$

Αν μία διγραμμική μορφή είναι συνεχής, coercive και συμμετρική, τότε ορίζει ένα νέο εσωτερικό γινόμενο, με νόρμα ισοδύναμη με την αρχική. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση, για κάθε $F \in H^*$, υπάρχει μοναδικό $y \in H$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in H$,

$$B[x, y] = Fx.$$

Στην περίπτωση που η μορφή δεν είναι συμμετρική, εξακολουθεί να περιγράφει όλα τα γραμμικά συναρτησοειδή, όπως στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.17 (Lax-Milgram)**.** *Έστω H χώρος Hilbert, και $\ : H \times H \to \mathbb{R}$ μία διγραμμική, συνεχής και coercive μορφή. Τοτε, για κάθε $F \in H^*$, υπάρχει μοναδικό $y \in H$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in H$,*

$$B[x, y] = Fx.$$

Απόδειξη. Η μοναδικότητα του y είναι απλή: αν $B[x, y_1] = B[x, y_2]$ για κάθε $x \in H$, τότε επιλέγοντας $x = y_1 - y_2$ και χρησιμοποιώντας την coercivity του B, έχουμε ότι

$$\lambda\|y_1 - y_2\|^2 \leq B[y_1 - y_2, y_1 - y_2] = 0,$$

άρα $y_1 = y_2$.

Για την ύπαρξη, αν $y \in H$, τότε η απεικόνιση $x \mapsto B[x, y]$ ορίζει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον H, άρα από το Θεώρημα του Riesz υπάρχει $Ty \in H$ τέτοιο ώστε

$$B[x, y] = \langle x, Ty \rangle$$

για κάθε $x \in H$. Ο τελεστής $T : H \to H$ είναι γραμμικός, και

$$\|Ty\|^2 = \langle Ty, Ty \rangle = B[Ty, y] \leq C\|y\|\|Ty\|,$$

άρα ο T είναι φραγμένος. Επιπλέον,

$$\lambda\|y\|^2 \leq B[y, y] = \langle y, Ty \rangle \leq \|y\|\|Ty\|,$$

άρα $c\|y\| \leq \|Ty\| \leq C\|y\|$ για κάθε $y \in H$.

Από το Θεώρημα του Riesz, προκειμένου να δείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε ότι ο $T : H \to H$ είναι επί. Αρχικά, η $\operatorname{im} T$ είναι πυκνή: αν $y \perp \overline{\operatorname{im} T}$, τότε για κάθε $x \in H$,

$$0 = \langle y, Tx \rangle = B[y, x].$$

Θέτοντας $x = y$ έχουμε ότι $y = 0$, άρα $\overline{\operatorname{im} T} = H$. Επιπλέον, η $\operatorname{im} T$ είναι κλειστή: αν $Tx_n \to y$ για κάποιο $y \in H$, τότε η (Tx_n) είναι Cauchy, άρα και η (x_n) είναι Cauchy, και συγκλίνει σε κάποιο $x \in H$, οπότε $y = Tx$.

Άρα $\operatorname{im} T = H$, και έπεται το ζητούμενο. □

Σε γενικότερα πλαίσια, ο χαρακτηρισμός του πότε μία διγραμμική μορφή περιγράφει όλα τα φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή όπως παραπάνω δίνεται από το Θεώρημα Lions-Lax-Milgram.

5 Συμπαγείς Τελεστές

5.1 Εισαγωγή

Σε απειροδιάστατους χώρους Banach, το γεγονός ότι ένας τελεστής μπορεί να έχει "πολύ μεγάλη εικόνα" είναι εμπόδιο στις γενικεύσεις πολλών θεωρημάτων που ισχύουν σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Για να περιορίσουμε το πόσο μεγάλη είναι η εικόνα, θεωρούμε την κλάση των *συμπαγών τελεστών*.

Ορισμός 5.1. Έστω X, Y χώροι Banach. Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται συμπαγής, αν η κλειστότητα $\overline{T(B_X)} \subseteq Y$ είναι συμπαγές σύνολο.

Για να ελέγξουμε ότι ένας τελεστής είναι συμπαγής, είναι ισοδύναμο να δείξουμε ότι για κάθε φραγμένη ακολουθία (x_n) στον X, υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) τέτοια ώστε η Tx_{k_n} να συγκλίνει στον . Επιπλέον, αφού ο Y είναι χώρος Banach, η προηγούμενη ιδιότητα είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι το σύνολο $\overline{T(B_X)}$ είναι ολικά φραγμένο, και αφού ο Y είναι μετρικός χώρος, ισοδύναμα θέλουμε το $T(B_X)$ να είναι ολικά φραγμένο σύνολο.

Είναι απλό να δείξουμε ότι κάθε συμπαγής τελεστής είναι φραγμένος. Το σύνολο των συμπαγών τελεστών $T : X \to X$ συμβολίζεται ως $\mathcal{K}(X, Y)$. Γράφουμε επίσης $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X, X)$.

Πρόταση 5.2. *Το σύνολο $\mathcal{K}(X, Y)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{B}(X, Y)$.*

Απόδειξη. Έστω (T_n) ακολουθία στον $\mathcal{K}(X, Y)$, με $T_n \to T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το $T(B_X) \subseteq Y$ είναι ολικά φραγμένο.

Έστω $\varepsilon > 0$, θέλουμε πεπερασμένα το πλήθος $y_1, \dots y_N \in Y$ τέτοια ώστε

$$T(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(y_i).$$

Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|T_{n_0} - T\| < \varepsilon/2$. Το $T_{n_0}(B_X) \subseteq Y$ είναι ολικά φραγμένο σύνολο, άρα υπάρχουν $x_1, \dots x_M \in B_X$ τέτοια ώστε

$$T_{n_0}(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} B_{\varepsilon/2}(T_{n_0}x_i).$$

Αν τώρα $y \in T(B_X)$, τότε $y = Tx$ για κάποιο $x \in B_X$. Επίσης, υπάρχει j τέτοιο ώστε $\|T_{n_0}x - T_{n_0}x_j\| < \varepsilon/2$, και τότε

$$\|Tx - T_{n_0}x_j\| \leq \|Tx - T_{n_0}x\| + \|T_{n_0}x - T_{n_0}x_j\| < \varepsilon\,.$$

Άρα

$$T(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} B_\varepsilon(T_{n_0}x_i),$$

που είναι το ζητούμενο. □

Οι απλούστεροι συμπαγείς τελεστές είναι αυτοί για τους οποιούς $\dim \operatorname{im} T < \infty$. Σε αυτή την περίπτωση, ο T ονομάζεται *τελεστής πεπερασμένης τάξης*. Έτσι, έχουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 5.3. *Έστω X, Y χώροι Banach, και (T_n) ακολουθία τελεστών πεπερασμένης τάξης από τον X στον Y, με $T_n \to T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Τότε $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.*

Στο πλαίσιο των χώρων Hilbert, κάθε συμπαγής τελεστής είναι όριο ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης. Αυτό όμως δεν ισχύει γενικά σε χώρους Banach.

Η συμπάγεια ενός τελεστή σχετίζεται επίσης με την ακόλουθη έννοια.

Ορισμός 5.4. Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Ο T λέγεται completely continuous, αν για κάθε $x_n \rightharpoonup x$ στον X, έχουμε ότι $Tx_n \to Tx$ στον Y.

Πρόταση 5.5. *Έστω X, Y χώροι Banach, και $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.*

i) Αν ο T είναι συμπαγής, τότε είναι completely continuous.

ii) Αν ο X είναι αυτοπαθής και ο T είναι completely continuous, τότε ο T είναι συμπαγής.

Απόδειξη. Άσκηση. $\square$

Στον χώρο των φραγμένων τελεστών, οι συμπαγείς τελεστές σχηματίζουν ένα ιδεώδες.

Πρόταση 5.6. *Έστω X, Y, Z χώροι Banach, και $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ και $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$.*

i) Αν $S \in \mathcal{K}(Y, Z)$, τότε $S \circ T \in \mathcal{K}(X, Z)$.

ii) Αν $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, τότε $S \circ T \in \mathcal{K}(X, Z)$.

Απόδειξη. Και στις δύο περιπτώσεις, αν (x_n) είναι φραγμένη ακολουθία στον X, τότε υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) τέτοια ώστε η $S(Tx_{k_n})$ να συγκλίνει στον Z. $\square$

Τέλος, η συμπάγεια ενός τελεστή είναι ισοδύναμη με τη συμπάγεια του συζυγούς του.

Θεώρημα 5.7 (Schauder)**.** *Έστω X, Y χώροι Banach, και $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Τότε, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ αν και μόνο αν $T^* \in \mathcal{K}(Y^*, X^*)$.*

Απόδειξη. Για το ευθύ, έστω (f_n) φραγμένη ακολουθία στον Y^*, με $\|f_n\| \leq C$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η $(T^* f_n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Θέτουμε $K = \overline{T(B_X)}$, το οποίο είναι συμπαγής μετρικός χώρος. Αρχικά, αν $y \in K$, τότε υπάρχει (x_n) στην B_X με $Tx_n \to y$, και

$$|f(Tx_n)| \leq \|f\|\|T\|\|x_n\| \leq C\|T\|,$$

και αφήνοντας το $n \to \infty$ έχουμε ότι $|f(y)| \leq C\|T\|$. Άρα η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο K. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$ και $y_1, y_2 \in K$, τότε

$$|f_n(y_1) - f_n(y_2)| \leq C\|y_1 - y_2\|,$$

άρα η (f_n) είναι ισοσυνεχής στο K.

Από το Θεώρημα Arzela-Ascoli η (f_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (f_{k_n}): $f_{k_n} \to f \in C(K)$ ως προς τη sup νόρμα. Τότε, για κάθε $x \in B_X$,

$$\begin{aligned}\|T^* f_{k_n}(x) - T^* f\| &= \sup_{x \in B_X} |T^* f_{k_n}(x) - T^* f(x)| = \sup_{x \in B_X} |f_{k_n}(Tx) - f(Tx)| \\ &\leq \sup_{y \in K} |f_{k_n}(y) - f(y)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,\end{aligned}$$

άρα $T^* f_{k_n} \to T^* f$, και η $(T^* f_{k_n})$ συγκλίνει στον X^*. Άρα ο T^* είναι συμπαγής.

Έστω τώρα ότι $T^* \in \mathcal{K}(Y^*, X^*)$, τότε από τα προηγούμενα, $T^{**} \in \mathcal{K}(X^{**}, Y^{**})$, επομένως το $T^{**}(B_{X^{**}})$ έχει συμπαγή κλειστότητα στον Y^{**}. Αφού $B_X \subseteq B_{X^{**}}$, το $T^{**}(B_X)$ έχει συμπαγή κλειστότητα στον Y^{**}. Όμως, $T(B_X) = T^{**}(B_X)$ από την Πρόταση 2.32, και το $Y \subseteq Y^{**}$ είναι κλειστό, άρα το $T(B_X)$ έχει συμπαγή κλειστότητα στον Y, και ο T είναι συμπαγής τελεστής. $\square$

5.2 Η Fredholm Alternative

Η Fredholm alternative αφορά την επιλυσιμοτητα εξισώσεων της μορφής $x - Tx = y$, όπου T συμπαγής τελεστής.

Γενικά, θεωρώντας γενικούς φραγμένους τελεστές, τα βασικά θεωρήματα της στοιχειώδους Γραμμικής Άλγεβρας παύουν να ισχύουν. Ωστόσο, η συμπάγεια του T οδηγεί σε πολύ καλές ιδιότητες του πυρήνα και της εικόνας του $I - T$.

Θεώρημα 5.8. *Έστω X χώρος Banach και $T \in \mathcal{X}$. Τότε:*

i) *Ο* $\ker(I - T)$ *έχει πεπερασμένη διάσταση.*

ii) *Η* $\mathrm{im}(I - T)$ *είναι κλειστή, και* $\mathrm{im}(I - T) = {}^{\perp}\ker(I - T^*)$.

iii) $\ker(I - T) = 0$ *αν και μόνο αν* $\mathrm{im}(I - T) = X$.

iv) $\dim\ker(I - T) = \dim\ker(I - T^*)$.

Προτού προχωρήσουμε στην απόδειξη, παραθέτουμε κάποια σχόλια.

Παρατήρηση 5.9. Η έννοια της "εναλλακτικής" βασίζεται στην εξής διχοτόμηση. Αν ένας τελεστής $T : X \to X$ είναι συμπαγής, τότε:

i) Είτε η εξίσωση $x = Tx$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$, και αυτό ισχύει αν και μόνο αν ο $I - T$ είναι επί,

ii) Είτε η εξίσωση $x = Tx$ έχει μη μηδενικές λύσεις, και τότε ο $I - T$ δεν είναι επί.

Παρατήρηση 5.10. Αν ο X έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε

$$\dim\ker(I - T) = \dim X - \dim\mathrm{im}(I - T),$$

και αυτή η σχέση μας λέει ότι ο $I - T$ είναι 1-1 αν και μόνο αν είναι επί. Στους χώρους άπειρης διάστασης η σχέση αυτή μπορεί να μην έχει νόημα, λόγω του απειρισμού των ποσοτήτων που εμφανίζονται, και υπάρχουν φραγμένοι γραμμικοί τελεστές οι οποίοι είναι 1-1 αλλά όχι επί, καθώς και τελεστές οι οποίοι είναι επί αλλά όχι 1-1. Δύο παραδείγματα δίνονται από τη δεξιά και αριστερή μετατόπιση,

$$R, L : \ell^2 \to \ell^2, \quad R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots), \quad S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Έτσι, το (iii) του προηγούμενου θεωρήματος είναι ουσιώδες.

Παρατήρηση 5.11. Συμπαγείς τελεστές εμφανίζονται στις μερικές διαφορικές εξισώσεις, όπου η μοναδικότητα λύσεων σχετίζεται με τον πυρήνα ενός τελεστή της μορφής $I - T$, και η ύπαρξη λύσεων σχετίζεται με την εικόνα του $I - T$. Έτσι, το (iii) του προηγούμενου θεωρήματος μας λέει ότι, σε κατάλληλα πλαίσια,

$$\text{Μοναδικότητα λύσεων} \;\Rightarrow\; \text{Ύπαρξη λύσεων.}$$

Παρατήρηση 5.12. Όταν ο T είναι συμπαγής και ο $I - T$ δεν είναι 1-1, τότε το (iv) του προηγούμενου θεωρήματος μας λέει ότι, αν $y \in X$,

$$\text{η εξίσωση } x - Tx = y \text{ έχει λύση} \;\Leftrightarrow\; y \in {}^{\perp}\ker(I - T^*).$$

Όμως, από το (i) του προηγούμενου θεωρήματος και το Θεώρημα του Schauder, ο $\ker(I - T^*)$ έχει πεπερασμένη διάσταση: αν $f_1, \dots f_N$ μία βάση του, τότε τα προηγούμενα είναι ισοδύναμα με το

$$\text{για κάθε } i = 1, \dots N, \ f_i(y) = 0.$$

Έτσι, η εξίσωση $x - Tx = y$ έχει λύση ως προς x, αν και μόνο αν ικανοποιούνται N σχέσεις ορθογωνιότητας για το y.

Απόδειξη. Για το (i), θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 1.16: αρκεί να δείξουμε ότι η κλειστή μοναδιαία μπάλα B του $\ker(I - T)$ είναι συμπαγής, το οποίο προκύπτει από τη σχέση $B \subseteq T(B_X)$ και τη συμπάγεια του T.

Για το (ii), έστω (x_n) ακολουθία στην $\mathrm{im}(I - T)$, με $x_n \to x \in X$. Τότε $x_n = y_n - Ty_n$ για κάποια $y_n \in X$. Θα θέλαμε η (y_n) να είνει φραγμένη, αλλά αυτό μπορεί να μην ισχύει, γιατί η ισότητα μπορεί να θεωρηθεί modulo του $\ker(I - T)$. Έστω $d_n = \mathrm{dist}(y_n, \ker(I - T))$, τότε από το Λήμμα 1.15, αφού ο $\ker(I - T)$ έχει πεπερασμένη διάσταση, υπάρχει $z_n \in \ker(I - T)$ τέτοιο ώστε $\|y_n - z_n\| = d_n$. Τότε,

$$x_n = (y_n - z_n) - T(y_n - z_n).$$

Ισχυριζόμαστε ότι η $(y_n - z_n)$ είναι φραγμένη. Αν όχι, τότε υπάρχει υπακολουθία με $\|y_{k_n} - z_{k_n}\| \to \infty$. Θέτουμε $w_n = \frac{y_n - z_n}{\|y_n - z_n\|}$, τότε

$$w_{k_n} - Tw_{k_n} = \frac{x_{k_n}}{\|y_{k_n} - z_{k_n}\|} \to 0.$$

Αφού η (w_{k_n}) είναι φραγμένη, η (Tw_{k_n}) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία: έστω $T_{w_{l_n}} \to z$, τότε και $w_{l_n} \to z$. Επιπλέον, $z - Tz = 0$, άρα $\mathrm{dist}(w_{l_n}, \ker(I - T)) \to 0$. Όμως,

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}(w_{l_n}, \ker(I - T)) &= \mathrm{dist}\left(\frac{y_{l_n} - z_{l_n}}{\|y_{l_n} - z_{l_n}\|}, \ker(I - T)\right) \\
&= \mathrm{dist}\left(\frac{y_{l_n}}{\|y_{l_n} - z_{l_n}\|}, \ker(I - T)\right) = \frac{\mathrm{dist}(y_{l_n}, \ker(I - T))}{\|y_{l_n} - z_{l_n}\|} = 1,
\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα η $(y_n - z_n)$ είναι φραγμένη, και η $(T(y_n - z_n))$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία: $T(y_{k_n} - z_{k_n}) \to y \in X$. Τότε,

$$y_{k_n} - z_{k_n} = x_{k_n} + T(y_{k_n} - z_{k_n}) \to x + y = z,$$

και $x = z - Tz$, άρα η $\mathrm{im}(I - T)$ είναι κλειστή στον X. Έπεται ότι $\mathrm{im}(I - T) = \ker(I - T^*)^{\perp}$ και $\mathrm{im}(I - T^*) = \ker(I - T^*)^{\perp}$.

Για το (iii), έστω ότι $\ker(I - T) = 0$, αλλά $X_1 = \mathrm{im}(I - T) \neq X$. Από το (ii), ο $X_1 \subseteq X$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X, άρα είναι χώρος Banach. Θέτουμε $X_2 = \mathrm{im}((I - T)^2)$, τότε ο X_2 είναι γνήσιος και κλειστός υπόχωρος του X_1, λόγω του ότι ο $I - T$ είναι 1-1. Επαγωγικά, κατασκευάζουμε γνησίως φθίνουσα ακολουθία χώρων Banach (X_n). Από το Λήμμα του Riesz, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε $x_n \in X_n$ με $\mathrm{dist}(x_n, X_{n+1}) > 1/2$. Τώρα, γράφουμε

$$Tx_n - Tx_m = -(x_n - Tx_n) + (x_m - Tx_m) + x_n - x_m.$$

Αν $n > m$, τότε $X_{n+1} \subseteq X_n \subseteq X_{m+1} \subseteq X_m$, άρα

$$-(x_n - Tx_n) + (x_m - Tx_m) + x_n \in X_m.$$

Επομένως, $\|Tx_n - Tx_m\| \geq \text{dist}(Tx_n - Tx_m, X_m) \geq \text{dist}(x_m, X_m) > 1/2$, το οποίο είναι άτοπο, λόγω της συμπάγειας του T. Άρα $\text{im}(I - T) = X$.

Για το αντίστροφο, αν $\text{im}(I-T) = X$, τότε $\ker(I-T^*) = \text{im}(I-T)^\perp$ (η σχέση αυτή ισχύει πάντα), άρα $\ker(I - T^*) = 0$. Αφού ο T^* είναι συμπαγής από το Θεώρημα του Schauder, έχουμε ότι $\text{im}(I - T^*) = X$, και $\ker(I - T) = \text{im}(I - T^*)^\perp = 0$.

Το (iv) αφήνεται ως άσκηση. $\square$

5.3 Το φάσμα

Έστω $T : X \to X$ φραγμένος γραμμικός τελεστής

Το resolvent set του T ορίζεται ως

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda I : X \to X \ 1-1, \text{ επί}\}.$$

Το φάσμα του T είναι το συμπλήρωμα του resolvent set: $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$.

Όπως και στη Γραμμική Άλγεβρα, ορίζουμε επίσης το σύνολο των ιδιοτιμών

$$\text{ev}(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \ker(T - \lambda I) \neq 0\}.$$

Όταν ο X έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε το φάσμα ταυτίζεται με το σύνολο των ιδιοτιμών. Όμως, σε χώρους Banach άπειρης διάστασης, ισχύει ότι $\text{ev}(T) \subseteq \rho(T)$, και η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια, όπως στην περίπτωση του right shift στον ℓ^2.

Πρόταση 5.13. *Έστω $T : X \to X$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε, το $\sigma(T)$ είναι συμπαγές σύνολο, και*

$$\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|].$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| > \|T\|$. Θα δείξουμε ότι, για κάθε $y \in X$, η εξίσωση $Tx - \lambda x = y$ έχει μοναδική λύση: ισοδύναμα, θέλουμε η εξίσωση

$$x = \frac{Tx}{\lambda} - \frac{y}{\lambda}$$

να έχει μοναδική λύση. Θέτοντας $S_y x = \frac{Tx}{\lambda} - \frac{y}{\lambda}$, ο $S_y : X \to X$ είναι συστολή, αφού

$$\|S_y x_1 - S_y x_2\| = \frac{\|Tx_1 - Tx_2\|}{|\lambda|} \leq \frac{\|T\|}{|\lambda|} \|x_1 - x_2\|,$$

άρα η εξίσωση $x = S_y x$ έχει μοναδική λύση στον X.

Μένει να δείξουμε ότι το $\rho(T)$ είναι ανοικτό: έστω $\lambda_0 \in \rho(T)$, και θέλουμε λ κοντά στο λ_0 τέτοιο ώστε, αν $y \in X$, η εξίσωση $Tx - \lambda x = y$ να έχει μοναδική λύση. Ισοδύναμα, θέλουμε λύση της εξίσωσης

$$Tx - \lambda_0 x = (\lambda - \lambda_0)x + y,$$

ή αλλιώς η εξίσωση $x = (T - \lambda_0 I)^{-1}((\lambda - \lambda_0)x + y)$ να έχει μοναδική λύση ως προς x. Όμως, ο τελεστής $P_y x = (T - \lambda_0 I)^{-1}((\lambda - \lambda_0)x + y)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\|P_y x_1 - P_y x_2\| \leq \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| |\lambda - \lambda_0| \|x_1 - x_2\|,$$

άρα αν $\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| |\lambda - \lambda_0| < 1$ έχουμε πάντα μοναδική λύση. $\square$

Το φάσμα ενός φραγμένου τελεστή μπορεί να είναι συνεχές, όπως στην περίπτωση του left shift στον ℓ^2. Πράγματι, αν $\lambda \in (-1,1)$, τότε για $x = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$,

$$Lx = (\lambda^{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda x,$$

άρα $(-1,1) \subseteq \mathrm{ev}(L) \subseteq \sigma(L)$. Επίσης, από την Πρόταση 5.13, έχουμε ότι

$$\sigma(L) = [-1,1].$$

Τα προηγούμενα δεν μπορούν να συμβαίνουν όταν ο τελεστής είναι συμπαγής. Αρχικά, θα χρειαστούμε ένα λήμμα.

Λήμμα 5.14. *Έστω X χώρος Banach, $\in \mathcal{K}(X)$ και (λ_n) ακολουθία διαφορετικών ανά δύο στοιχείων του $\sigma(T)$, με $\lambda_n \neq 0$ για κάθε n, και $\lambda_n \to \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε $\lambda = 0$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.8, ο $T - \lambda_n I$ είναι 1-1 αν και μόνο αν είναι επί, επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in X$ με $\|x_n\| = 1$ και $Tex_n = \lambda_n ex_n$. Αν $X_n = \mathrm{span}\{x_1, \dots x_n\}$, ισχυριζόμαστε ότι $x_{n+1} \notin X_n$. Αρχικά, $x_2 \notin X_1$: αν $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0$, τότε

$$\mu_1 x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mu_2 x_2 = \frac{1}{\lambda_1} T(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) = 0,$$

και αφού $\lambda_2 \neq \lambda_1$, έχουμε ότι $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Έστω τώρα ότι $x_{k+1} \notin X_k$ για $k = 1, \dots n$. Αν τώρα $x_{n+2} \in X_{n+1}$, έστω

$$x_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i x_i,$$

και τότε

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{n+2}\mu_i x_i = \lambda_{n+2} x_{n+2} = T x_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \mu_i x_i,$$

και από τη γραμμική ανεξαρτησία των $x_1, \dots x_{n+1}$, έχουμε ότι $\lambda_{n+2}\mu_i = \lambda_i \mu_i$ για $i = 1, \dots n+1$. Αφού όλα τα λ_i είναι διαφορετικά μεταξύ τους, έπεται ότι $\mu_i = 0$ για κάθε i, άρα $x_{n+2} = 0$, το οποίο είναι άτοπο. Επαγωγικά, $x_{n+1} \notin X_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από το Λήμμα του Riesz, για κάθε $n \geq 2$ υπάρχει $y_n \in X_n$ με $\|y_n\| = 1$ και $\mathrm{dist}(y_n, X_{n-1}) = 1$. Αν $n > m \geq 2$, τότε

$$X_{m-1} \subseteq X_m \subseteq X_{n-1}.$$

Επιπλέον, $(T - \lambda_n I)X_n \subseteq X_{n-1}$, επομένως

$$\begin{aligned}\left\|\frac{Ty_n}{\lambda_n} - \frac{Ty_m}{\lambda_m}\right\| &= \left\|\frac{Ty_n - \lambda_n y_n}{\lambda_n} - \frac{Ty_m - \lambda_m y_m}{\lambda_m} - y_m + y_n\right\| \\ &\geq \mathrm{dist}(y_n, X_{n-1}) = 1.\end{aligned}$$

Η (y_n) είναι φραγμένη, άρα η (Ty_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα, αν $\lambda_n \to \lambda \neq 0$, η (Ty_n/λ_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, το οποίο είναι άτοπο. □

Η επόμενη πρόταση καλύπτει όλες τις δυνατές περιπτώσεις για το φάσμα ενός συμπαγούς τελεστή.

Πρόταση 5.15. *Έστω X χώρος Banach με $\dim X = \infty$, και $T : X \to X$ συμπαγής τελεστής. Τότε $0 \in \sigma(T)$, $\sigma(T) \setminus \{0\} = \mathrm{ev}(T) \setminus \{0\}$, και ακριβώς ένα από τα ακόλουθα ισχύουν:*

i) $\sigma(T) = \{0\}$*,*

ii) Το $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *είναι μη κενό και πεπερασμένο,*

iii) Το $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *είναι μία ακολουθία η οποία συγκλίνει στο* 0*.*

Απόδειξη. Αρχικά, αν $0 \notin \sigma(T)$, τότε ο T είναι αντιστρέψιμος, και ο $I = TT^{-1}$ είναι συμπαγής τελεστής, ως σύνθεση συμπαγούς με φραγμένο τελεστή, το οποίο είναι άτοπο.

Για την ισότητα $\sigma(T) \setminus \{0\} = \mathrm{ev}(T) \setminus \{0\}$ χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 5.8, όπως και στην απόδειξη του προηγούμενου λήμματος.

Τέλος, η αποδειξη του τελευταίου ισχυρισμού έπεται από το προηγούμενο λήμμα. □

5.4 Διαγωνιοποίηση αυτοσυζυγών συμπαγών τελεστών

Έστω H χώρος Hilbert και $T : H \to H$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Απο τη Γραμμική Άλγεβρα, αν ο H έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση του H από ιδιοδιανύσματα του T αν και μόνο αν ο T είναι κανονικός, δηλαδή $TT^* = T^*T$. Για να ισχύει ομως το προηγούμενο, θα πρέπει να θεωρήσουμε χώρους με πεπερασμένη διάσταση πάνω από το $\mathbb{C}$, γιατί οι ιδιοτιμές μπορεί να είναι μιγαδικές.

Προκειμένου να έχουμε ορθοκανονική βάση του H από ιδιοδιανύσματα του T, ζητάμε ο T να είναι συμμετρικός, δηλαδή $T = T^*$. Στην περιπτωση των χώρων Hilbert, ταυτίζοντας τον H με τον H^* μέσω του Θεωρήματος του Riesz, λέμε ότι ένας φραγμένος τελεστής $T : H \to H$ είναι αυτοσυζυγής, αν

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \ \forall x, y \in H.$$

Πρόταση 5.16. *Έστω H χώρος Hilbert, και $T : H \to H$ αυτοσυζυγής τελεστής. Θέτουμε*

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle, \quad M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle.$$

Τότε $\sigma(T) \subseteq [m, M]$*,* $m, M \in \sigma(T)$*, και* $\|T\| = \mu := \max\{|m|, |M|\}$*.*

Απόδειξη. Για $\lambda < m$, θεωρούμε τη διγραμμική μορφή

$$B[x, y] = \langle Tx - \lambda x, y\rangle.$$

Τοτε,

$$|B[x, y]| \leq \|T - \lambda I\|\|x\|\|y\|,$$

άρα η B είναι συνεχής, και επιπλέον, αν $\|x\| = 1$,

$$B[x, x] = \langle Tx, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle \geq m - \lambda,$$

άρα $B[x, x] \geq (m - \lambda)\|x\|^2$ για κάθε $x \in H$. Επομένως η B είναι coercive, άρα από το Θεώρημα Lax-Milgram (Θεώρημα 4.17), για κάθε $z \in H$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ τέτοιο ώστε, για κάθε $y \in H$,

$$\langle Tx - \lambda x, y\rangle = \langle z, y\rangle.$$

Επομένως, η $T - \lambda I : H \to H$ είναι 1-1 και επί, άρα $\lambda \in \rho(T)$. Ομοίως για τα $\lambda > M$.

Θέτουμε τώρα $S = T - mI$, τότε ο S είναι αυτοσυζυγής. Επιπλέον, $\langle Sx, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$, και

$$\inf_{\|x\|=1} \langle Sx, x\rangle = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx - mx, x\rangle = 0.$$

Επομένως, υπάρχει ακολουθία (x_n) με $\|x_n\| = 1$ και $\langle Sx_n, x_n\rangle \to 0$.

Η διγραμμική μορφή $B[x, y] = \langle Sx, y\rangle$ είναι μη αρνητική και συμμετρική, άρα ικανοποιεί την ανισότητα Cauchy-Schwartz: για κάθε $x, y \in H$,

$$\langle Sx, y\rangle = B[x, y] \leq \sqrt{B[x, x]}\sqrt{B[y, y]} = \sqrt{\langle Sx, x\rangle}\sqrt{\langle Sy, y\rangle}.$$

Θεωρώντας $y \in H$ με $\|y\| = 1$, έχουμε ότι

$$\|Sx\| \leq C\sqrt{\langle Sx, x\rangle}$$

για κάθε $x \in X$. Επομένως, για $x = x_n$, $\|Sx_n\| \to 0$. Έπεται ότι ο S δεν είναι αντιστρέψιμος: αν ήταν, τότε

$$\|x_n\| = \|S^{-1}(Sx_n)\| \leq \|S^{-1}\|\|Sx_n\| \to 0,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, αν $x \in H$ με $\|x\| = 1$, $|\langle Tx, x\rangle| \leq \|T\|$, άρα $\mu \leq \|T\|$. Για την αντίστροφη ανισότητα, για $x, y \in H$, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\langle T(x + y), x + y\rangle &= \langle Tx, x\rangle + \langle Ty, y\rangle + 2\langle Tx, y\rangle,\\ \langle T(x - y), x - y\rangle &= \langle Tx, x\rangle + \langle Ty, y\rangle - 2\langle Tx, y\rangle,\end{aligned}$$

άρα

$$4\langle Tx, y\rangle = \langle T(x + y), x + y\rangle - \langle T(x - y), x - y\rangle$$

για κάθε $x, y \in H$. Όμως,

$$\langle T(x + y), x + y\rangle \leq M\|x + y\|^2, \quad -\langle T(x - y), x - y\rangle \leq -m\|x - y\|^2,$$

επομένως

$$4\langle Tx, y\rangle \leq M\|x + y\|^2 - m\|x - y\|^2 \leq \mu\left(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2\right) = 2\mu(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

από τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Άρα, για κάθε $x, y \in H$ με $\|x\| = \|y\| = 1$, έχουμε ότι

$$\langle Tx, y\rangle \leq \mu,$$

άρα $\|T\| \leq \mu$. □

Από την προηγούμενη πρόταση έπεται το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 5.17. *Έστω $T : H \to H$ αυτοσυζυγής, φραγμένος τελεστής, με $\sigma(T) = \{0\}$. Τότε $T = 0$.*

Το επόμενο θεώρημα αφορά τη διαγωνιοποίηση συμπαγών αυτοσυζυγών τελεστών σε χώρους Hilbert.

Θεώρημα 5.18 (Φασματικό θεώρημα συμπαγών αυτοσυζυγών τελεστών)**.** *Έστω H χώρος Hilbert, και T : $H \to H$ αυτοσυζυγής, συμπαγής τελεστής. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση του H από ιδιοδιανύσματα του H.*

Απόδειξη. Έστω (λ_n) η ακολουθία των μη μηδενικών ιδιοτιμών του H. Θέτουμε $\lambda_0 = 0$, $H_0 = \ker T$ και $H_n = \ker(T - \lambda_n I)$, τότε $0 \le \dim H_0 \le \infty$ και $0 < \dim H_n < \infty$ για $n \ge 1$.

Αρχικά, οι H_n είναι ανά δύο ορθογώνιοι: αν $x \in H_n, y \in H_m$, τότε

$$\lambda_m \langle x, y\rangle = \langle x, \lambda_m y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle = \lambda_n \langle x, y\rangle,$$

άρα $\langle x, y\rangle = 0$. Έστω τώρα

$$E = \operatorname{span}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right),$$

θα δείξουμε ότι ο E είναι πυκνός στον H. Αρχικά, $T(E) \subseteq E$. Έστω τώρα $x \in E^\perp$, τότε για κάθε $y \in E$,

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = 0,$$

άρα $T(E^\perp) \subseteq E^\perp$. Θέτουμε $T_0 = T|_{E^\perp}$, τότε ο T_0 είναι αυτοσυζυγής και συμπαγής στον $E^\perp$.

Θα δείξουμε ότι $\sigma(T) = \{0\}$: αν αυτό δεν ισχύει, τότε υπάρχει μη μηδενικό $\lambda \in \sigma(T_0)$. Από την Πρόταση 5.15, $\lambda \in \mathrm{ev}(T_0)$, άρα υπάρχει $z \in E^\perp$ με $z \ne 0$ και $T_0 z = \lambda z$. Άρα το λ είναι μη μηδενική ιδιοτιμή του T, επομένως $\lambda = \lambda_N$ για κάποιο N, και $z \in H_N$. Επομένως, $z \in H_N \cap E^\perp$, επομένως $z = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Αφού $\sigma(T_0) = \{0\}$, από το Πόρισμα 5.17 έπεται ότι $T_0 = 0$, άρα ο T μηδενίζεται στο $E^\perp$, επομένως $E^\perp \subseteq \ker T$. Όμως, $\ker T \subseteq E$, άρα $E^\perp \subseteq E$, και $E^\perp = 0$. Άρα $\overline{E} = H$.

Τέλος, για κάθε H_n, $n \ge 0$, βρίσκουμε ορθοκανονική βάση του H_n, και η ένωσή τους μας δίνει ορθοκανονική βάση του H. □

Παρατήρηση 5.19. Έστω H χώρος Hilbert, και T όπως στο προηγούμενο θεώρημα. Αν $x \in H$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n,$$

όπου $x_n \in H_n$, με τον συμβολισμό της απόδειξης του προηγούμενου θεωρήματος. Αφού ο T είναι συνεχής, έπεται ότι

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} Tx_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n,$$

αφού $x_0 \in H_0 = \ker T$. Αν τώρα $m \in \mathbb{N}$ και $\|x\| \le 1$, λόγω της καθετότητας των H_n,

$$\left\| Tx - \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} \lambda_n x_n \right\|^2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \|x_n\|^2 \le \sup_{n \ge m+1} |\lambda_n|^2 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,$$

από την Πρόταση 5.15. Επομένως, ισχύει η ισότητα

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n, \tag{5.1}$$

όπου λ_n είναι οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του T, και $P_n : H \to \ker(T - \lambda_n I)$ είναι η κάθετη προβολή. Η σειρά εδώ δεν συγκλίνει μόνο κατά σημείο, αλλά στον χώρο των φραγμένων γραμμικών τελεστών.

Παρατήρηση 5.20. Στην περίπτωση που ο H είναι μιγαδικός χώρος Hilbert και ο T είναι κανονικός τελεστής (δηλαδή $TT^* = T^*T$), ισχύει ξανά η ισότητα (5.1), αλλά οι ιδιοτιμές του T μπορεί να είναι μιγαδικές.

Παρατήρηση 5.21. Στο προηγούμενο θεώρημα, οι υπόχωροι H_n για $n \geq 1$ έχουν όλοι πεπερασμένη διάσταση. Επομένως, παίρνουμε το εξής πόρισμα:

Πόρισμα 5.22. *Έστω H χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{K}(H)$ αυτοσυζυγής με* $\ker T = 0$. *Τότε ο H είναι διαχωρίσιμος.*

Αν ο H είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, τότε το προηγούμενο θεώρημα μας δείχνει ότι κάθε αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής είναι όριο τελεστών πεπερασμένης τάξης. Αυτό όμως ισχύει γενικά σε χώρους Hilbert, χωρίς την υπόθεση της αυτοσυζυγίας και διαχωρισιμότητας.

Θεώρημα 5.23. *Έστω H χώρος Hilbert, και $T \in \mathcal{K}(H)$. Τότε ο T είναι όριο ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης.*

Απόδειξη. Αφού η $\overline{T(B_H)}$ είναι συμπαγές σύνολο, είναι διαχωρίσιμο. Επομένως, η $E = \overline{\text{im}(T)} \subseteq H$ είναι διαχωρίσιμο σύνολο. Έστω (e_n) ορθοκανονική βάση της E, και θέτουμε

$$P_n : H \to \text{span}\{e_1, \dots e_n\}$$

την κάθετη προβολή, και $T_n = P_n T$. Τότε, κάθε P_n έχει πεπερασμένη τάξη.

Αρχικά, για κάθε $x \in H$, $Tx \in E$, άρα $P_n(Tx) \to Tx$, και $T_n x \to Tx$. Αφού ο T είναι συμπαγής, αν $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $x_1, \dots x_m \in B_H$ με

$$T(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_{\varepsilon/3}(Tx_i).$$

Έστω $x \in B_H$, τότε υπάρχει j τέτοιο ώστε $\|Tx - Tx_j\| < \varepsilon/3$. Τότε, για κάθε n,

$$\begin{aligned}\|Tx - T_n x\| &\leq \|Tx - Tx_j\| + \|Tx_j - T_n x_j\| + \|T_n x_j - T_n x\| \\ &= \|Tx - Tx_j\| + \|Tx_j - T_n x_j\| + \|P_n(Tx_j - Tx)\| \\ &\leq 2\|Tx - Tx_j\| + \|Tx_j - T_n x_j\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|Tx_j - T_n x_j\|.\end{aligned}$$

Αφού $T_n x_i \to Tx_i$ για $i = 1, \dots m$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \geq n_0$ και για $i = 1, \dots m$, $\|T_n x_i - Tx_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Άρα, για κάθε $h \in B_H$ και για κάθε $n \geq n_0$, $\|T_n x - Tx\| < \varepsilon$, άρα $T_n \to T$. □

6 Τοπολογικοί γραμμικοί χώροι

6.1 Εισαγωγή

Έστω X ένας γραμμικός χώρος με μία τοπολογία $\mathcal{T}$. O $(X, \mathcal{T})$ είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος, αν η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός είναι συνεχείς πράξεις ως προς την $\mathcal{T}$, δηλαδή οι

$$+ : X \times X \to X, \quad \cdot : \mathbb{R} \times X \to X$$

είναι συνεχείς. Εδώ, στους χώρους $X \times X$ και $\mathbb{R} \times X$ θεωρούμε την τοπολογία γινόμενο: για παράδειγμα, εφοδιάζουμε τον $\mathbb{R} \times X$ με τη μικρότερη τοπολογία για την οποία οι προβολές

$$\pi_{\mathbb{R}}, \pi_X : \mathbb{R} \times X \to X, \quad \pi_{\mathbb{R}}(a, x) = a, \;\; \pi_2(a, x) = x,$$

είναι συνεχείς. Αν $\mathcal{B}$ είναι μία βάση του X, τότε μία βάση του $\mathbb{R} \times X$ δίνεται από τα σύνολα της μορφής

$$\{(a,b) \times U : a, b \in \mathbb{R}, a < b, U \in \mathcal{B}\}.$$

Η κλάση των τοπολογικών γραμμικών χώρων εμφανίζεται φυσιολογικά σε περιπτώσεις γραμμικών χώρων οι οποίοι δεν έχουν νόρμα, ή στην περίπτωση που μας ενδιαφέρουν τοπολογίες σε χώρους με νόρμα οι οποίες δεν επάγονται από τη νόρμα. Δύο παραδείγματα για τη δεύτερη περιπτωση αποτελούν οι weak και weak* τοπολογίες σε έναν χώρο και τον δϋικό του, αντίστοιχα. Για την πρώτη περίπτωση, ένα παράδειγμα είναι ο χώρος $C(\Omega)$, όπου το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό, με κατάλληλη τοπολογία.

Από τον ορισμό, ένα άμεσο γεγονός είναι ότι οι μεταφορές και οι διαστολές είναι ομοιομορφισμοί ενός τοπολογικού γραμμικού χώρου. Πράγματι, αν $T_y(x) = x + y$ και $D_a(x) = ax$ για $x, y \in X$ και $a \neq 0$, τότε οι $T_y, D_a : X \to X$ είναι συνεχείς, 1-1 και επί, και οι αντίστροφες απεικονίσεις $(T_y)^{-1} = T_{-y}$, $(D_a)^{-1} = D_{1/a}$ είναι επίσης συνεχείς.

Αν ο $(X, \mathcal{T})$ είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον χώρο των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$. Ο χώρος αυτός συμβολίζεται με $(X, \mathcal{T})^*$, ή X^*.

Η επόμενη πρόταση αφορά τη συνέχεια ημινορμών στον X.

Πρόταση 6.1. *Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος και $p : X \to \mathbb{R}$ μία ημινόρμα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

i) *Η p είναι συνεχής.*

ii) *Το σύνολο $\{x \in X : p(x) < 1\}$ είναι ανοικτό.*

iii) $0 \in \mathrm{int}\{x \in X : p(x) < 1\}$.

iv) $0 \in \mathrm{int}\{x \in X : p(x) \leq 1\}$.

v) *Η p είναι συνεχής στο* 0.

vi) *Υπάρχει συνεχής ημινόρμα $q : X \to \mathbb{R}$ με $p \leq q$.*

Επιπλέον, ισχύουν τα ακόλουθα.

vii) *Αν $p_1, \dots p_n$ είναι συνεχείς ημινόρμες στον X, τότε οι $p_1 + \dots p_n$ και $\max p_i$ είναι συνεχείς ημινόρμες στον X.*

viii) *Αν $(p_i)_{i \in I}$ είναι μία οικογένεια συνεχών ημινορμών και υπάρχει συνεχής ημινόρμα $q : X \to \mathbb{R}$ με $p_i \leq q$ για κάθε $i \in I$, τότε η $\sup_i p_i$ είναι συνεχής ημινόρμα στον X.*

Απόδειξη. Άσκηση. □

Με όμοιο τρόπο, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα, στην περίπτωση γραμμικών συναρτησοειδών.

Πρόταση 6.2. *Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ ένα γραμμικό συναρτησοειδές. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

i) *Το f είναι συνεχές.*

ii) *Το f είναι συνεχές στο* 0.

iii) *Το f είναι συνεχές σε κάποιο σημείο του X.*

iv) Ο πυρήνας $\ker f$ *είναι κλειστό υποσύνολο του* X.

v) Η ημινόρμα $|f|$ *είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Άσκηση. □

Η κλάση των τοπολογικών γραμμικών χώρων είναι αρκετά γενική, και πολλοί τοπολογικοί γραμμικοί χώροι έχουν ιδιότητες που έρχονται σε αντίθεση με τις αντίστοιχες ιδιότητες χώρων Banach.

Παράδειγμα 6.3. Έστω $p \in (0,1)$, και θέτουμε

$$L^p(0,1) = \left\{ f : (0,1) \to \mathbb{R}, f \text{ μετρήσιμη}, \int_0^1 |f|^p < \infty \right\}.$$

Θεωροώντας τις κλάσεις ισοδυναμίας των συναρτήσεων που είναι σχεδόν παντού ίσες, μία μετρική στον $L^p(0,1)$ είναι η

$$d(f,g) = \int_\Omega |f-g|^p.$$

Με αυτή τη μετρική, ο $L^p(0,1)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. Είναι απλό να δείξουμε ότι η τοπολογία που επάγει αυτή η μετρική κάνει τον $L^p(0,1)$ έναν τοπολογικό γραμμικό χώρο.

Έστω τώρα $T \in (L^p(0,1))^*$ ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές, με $T \neq 0$. Τότε, υπάρχει $f \in L^p(0,1)$ με $\int_0^1 |f|^p = 1$ και $Tf = M > 0$. Αφού το μέτρο

$$A \mapsto \int_A |f|^p$$

είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, υπάρχει $a \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^a |f|^p = \int_a^1 |f|^p = \frac{1}{2}.$$

Θέτουμε $f_1 = f\chi_{(0,a)}$ και $f_2 = f\chi_{(a,1)}$, τότε $f = f_1 + f_2$, άρα είτε $Tf_1 \geq M/2$, είτε $Tf_2 \geq M/2$. Έστω ότι ισχύει το πρώτο, τότε $T(2f_1) \geq M$, και

$$d(0, 2f_1) = \int_0^1 |2f_1|^p = 2^p \int_0^a |f|^p = 2^{p-1}.$$

Θέτουμε $g_1 = 2f_1$, και επαγωγικά κατασκευάζουμε ακολουθία (g_n) με $d(g_n, 0) = 2^{n(p-1)}$ και $Tg_n \geq M$, το οποίο είναι άτοπο, λόγω της συνέχειας του T. Επομένως $(L^p(0,1))^* = \{0\}$. Ειδικότερα, η τοπολογία που επάγει η d δεν μπορεί να προέρχεται από νόρμα.

Το προηγούμενο παράδειγμα μας δείχνει ότι υπάρχουν τοπολογικοί γραμμικοί χώροι με τετριμμένους δϋικούς. Έτσι, για την κλασσική ιδιότητα της ύπαρξης πληθώρας φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών, θα δούμε στη συνέχεια μία πιο περιορισμένη κλάση τοπολογικών γραμμικών χώρων.

Ερχόμαστε τώρα σε δύο σημαντικές κλάσεις υποσυνόλων γραμμικών χώρων.

Ορισμός 6.4. Έστω X γραμμικός χώρος, και $A \subseteq X$.

i) Το A ονομάζεται ισορροπημένο (balanced), αν $ax \in A$ για κάθε $x \in X$ και $a \in \mathbb{R}$ με $|a| \leq 1$.

ii) Το A ονομάζεται απορροφούν (absorbing), αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ τέτοιο ώστε $tx \in A$ για κάθε $t \in [0, \varepsilon_x)$.

Κάθε absorbing σύνολο περιέχει το 0. Λέμε επίσης ότι το A είναι absorbing στο $x \in A$, αν το $A - x$ είναι absorbing.

Τα balanced και absorbing σύνολα θα πρέπει, διαισθητικά, να είναι "περιοχές" του 0 στον X. Προς αυτή την κατεύθυνση έχουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 6.5. *Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος. Τότε υπάρχει βάση περιοχών του 0 η οποία αποτελείται από balanced σύνολα.*

Απόδειξη. Έστω $U \subseteq X$ ανοικτό, με $0 \in U$. Θεωρούμε την απεικόνιση $P : \mathbb{R} \times X \to X$ με $P(a, x) = ax$, η οποία είναι συνεχής. Το $P^{-1}(U)$ είναι ανοικτό, και το $(0, 0) \in P^{-1}(U)$. Αφού μία βάση της τοπολογίας του $\mathbb{R} \times X$ δίνεται από γινόμενα βασικών συνόλων στο $\mathbb{R}$ και στον X, αντίστοιχα, υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $V \subseteq X$ ανοικτό, τέτοιο ώστε

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \times V \subseteq P^{-1}(U),$$

άρα $tV \subseteq U$ για κάθε t με $|t| < \varepsilon$. Θεωρούμε το σύνολο

$$W = \bigcup \{tV : |t| < \varepsilon\},$$

και τότε το W είναι ανοικτό υποσύνολο του U, το οποίο είναι balanced. □

6.2 Τοπικά κυρτοί χώροι

Η κεντρική διαφορά που θα περιορίσει την κλάση των τοπολογικών γραμμικών χώρων είναι η απαίτηση ύπαρξης βάσης περιοχών οι οποίες να είναι κυρτές.

Έστω $p : X \to \mathbb{R}$ μία ημινόρμα, και θεωρούμε το σύνολο $A = [p < 1]$. Τότε το A είναι κυρτό, balanced και absorbing σε κάθε σημείο του. Είναι αξιοσημείωτο ότι ισχύει και το αντίστροφο, ισχυροποιώντας το Λήμμα 2.17.

Πρόταση 6.6. *Έστω X χώρος με νόρμα, και $A \subseteq X$ κυρτό, balanced και absorbing σε κάθε σημείο του. Τότε υπάρχει μοναδική ημινόρμα $p : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $A = [p < 1]$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε τη μοναδικότητα: έστω p_1, p_2 ημινόρμες με $[p_1 < 1] = [p_2 < 1]$ και $x \neq 0$. Αν $p_1(x) > p_2(x)$, τότε

$$p_2\left(\frac{x}{p_1(x)}\right) = \frac{p_2(x)}{p_1(x)} < 1,$$

άρα $\frac{x}{p_1(x)} \in [p_2 < 1] = [p_1 < 1]$, το οποίο είναι άτοπο.

Για την ύπαρξη, όπως στο Λήμμα 2.17, ορίζουμε το συναρτησοειδές Minkowski

$$p_A : X \to [0, \infty), \quad p_A(x) = \inf\{t > 0 : x \in tA\},$$

και αποδεικνύουμε τις ζητούμενες ιδιότητες. □

Με βάση την προηγούμενη πρόταση, θέλοντας τα κυρτά, balanced και absorbing (σε κάθε σημείο τους) υποσύνολα του X να είναι ανοικτά, θα ορίσουμε την τοπολογία ενός χώρου η οποία θα προέρχεται από μία οικογένεια ημινορμών.

Έστω X γραμμικός χώρος, και $\mathcal{P}$ μία οικογένεια από ημινόρμες η οποία διαχωρίζει τα σημεία του X: για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχει $p \in \mathcal{P}$ με $p(x-y) \neq 0$. Στον X ορίζεται μία τοπολογία, θεωρώντας ως υποβάση του X τα σύνολα της μορφής $\{y : p(y-x) < \varepsilon\}$, για $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Έτσι, ένα σύνολο A είναι ανοικτό, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και $p_1, \ldots p_n \in \mathcal{P}$, με

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{y \in X : p_i(y-x) < \varepsilon\} \subseteq A.$$

Ορισμός 6.7. Ένας τοπικά κυρτός χώρος είναι ένας γραμμικός χώρος με μία τοπολογία η οποία επάγεται από μία οικογένεια ημινορμών η οποία διαχωρίζει τα σημεία του X.

Η υπόθεση ότι η οικογένεια των ημινορμών διαχωρίζει τα σημεία του X τίθεται για να ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 6.8. *Κάθε τοπικά κυρτός χώρος είναι Hausdorff τοπολογικός γραμμικός χώρος.*

Παράδειγμα 6.9. Έστω X χώρος Banach, και

$$\mathcal{P} = \{|f| : f \in X^*\}.$$

Η $\mathcal{P}$ είναι μία οικογένεια από ημινόρμες που διαχωρίζει τα σημεία του X. Η τοπολογία που επάγει η οικογένεια αυτή είναι η weak τοπολογία του X. Έτσι, ο (X, w) είναι τοπικά κυρτός χώρος.

Ομοίως, αν ο X είναι χώρος με νόρμα και ορίσουμε

$$\mathcal{P}' = \{|Ex| : x \in X\},$$

όπου $E : X \to X^{**}$ είναι η κανονική εμφύτευση, η $\mathcal{P}'$ επάγει την w^* τοπολογία στον X^*. Έτσι, ο (X^*, w^*) είναι τοπικά κυρτός χώρος.

Παράδειγμα 6.10. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, και $C(\Omega)$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Αν $K \subseteq \Omega$ συμπαγές, ορίζουμε

$$p_K(f) = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

Αν $\mathcal{P} = \{p_K : K \subseteq \Omega \text{ συμπαγές}\}$, τότε ο $(C(\Omega), \mathcal{P})$ είναι τοπικά κυρτός χώρος.

Η ορολογία "τοπικά κυρτός χώρος" αποσαφηνίζεται μέσω της ακόλουθης πρότασης.

Πρόταση 6.11. *Έστω X Hausdorff τοπολογικός γραμμικός χώρος, και $\mathcal{U}$ η οικογένεια όλων των ανοικτών και κυρτών υποσυνόλων του X τα οποία περιέχουν το 0. Τότε ο X είναι τοπικά κυρτός χώρος, αν και μόνο αν η $\mathcal{U}$ είναι βάση περιοχών του 0.*

Απόδειξη. Αν ο X είναι τοπικά κυρτός, και η τοπολογία του παράγεται από τις ημινόρμες $p \in \mathcal{P}$, τότε οι πεπερασμένες τομές συνόλων της μορφής $[p < \varepsilon]$ για $p \in \mathcal{P}$ και $\varepsilon > 0$ είναι ανοικτά και κυρτά σύνολα, τα οποία αποτελούν βάση περιοχών του 0.

Αντιστρόφως, έστω ότι η προηγούμενη οικογένεια αποτελεί βάση περιοχών του X. Από την απόδειξη του Λήμματος 6.5, κάθε ανοικτό U με $0 \in U$ περιέχει ένα ανοικτό, κυρτό και balanced σύνολο το οποίο να περιέχει το 0, άρα η οικογένεια $\mathcal{B}$ των ανοικτών, κυρτών και absorbing συνόλων που περιέχουν το 0 είναι βάση περιοχών του 0. Αν τώρα $A \in \mathcal{B}$, τότε το A είναι absorbing σε κάθε σημείο του: αν $x \in A$ και $y \in X$, τότε η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to X$ με $f(t) = x + ty$ είναι συνεχής, με $f(0) = x \in A$. Άρα $0 \in f^{-1}(A)$ και το τελευταίο σύνολο είναι ανοικτό, επομένως υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq A$, άρα $x + ty \in A$ για κάθε $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Αφού κάθε $A \in \mathcal{B}$ είναι κυρτό, balanced και absorbing σε κάθε σημείο του, από την Πρόταση 6.6 υπάρχει ημινόρμα p_A τέτοια ώστε $A = [p_A < 1]$. Θέτουμε $\mathcal{P}$ αυτή την οικογένεια, και τότε η $\mathcal{P}$ διαχωρίζει τα σημεία του X: πράγματι, αν $x \in X$ με $x \neq 0$, υπάρχει $A \in \mathcal{B}$ με $x \notin A$, και τότε $p_A(x) \geq 1$, άρα $p_A(x) \neq 0$. Τότε, η τοπικά κυρτή τοπολογία $\mathcal{T}_0$ που επάγεται από τις ημινόρμες p_A ταυτίζεται με την αρχική τοπολογία $\mathcal{T}$ του X. □

Αφού κάθε τοπικά κυρτός χώρος είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος, αν το $f : X \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές, τότε το f είναι συνεχές αν και μόνο αν ισχύουν οι συνθήκες της Πρότασης 6.2. Ισχύει όμως και η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 6.12. *Έστω X τοπικά κυρτός χώρος, του οποίου η τοπολογία επάγεται από μία οικογένεια ημινορμών $\mathcal{P}$. Τότε, ένα γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο, αν και μόνο αν υπάρχουν $M > 0$ και $p_1, \dots p_n \in \mathcal{P}$ τέτοια ώστε, για κάθε $x \in X$,*

$$|f(x)| \leq M \left(p_1(x) + \cdots + p_n(x)\right).$$

Απόδειξη. Έστω ότι το $f : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχές, τότε το σύνολο $\{x : |f(x)| < 1\}$ είναι ανοικτό, και περιέχει το 0. Επομένως, υπάρχει βασική περιοχή του 0 η οποία να περιέχεται στο σύνολο αυτό: υπάρχουν $p_1, \dots p_n \in \mathcal{P}$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : p_i(x) < \varepsilon\} \subseteq [|f| < 1].$$

Έστω $x \in X$. Αν $\delta > 0$, τότε για $i = 1, \dots n$,

$$p_i\left(\frac{\varepsilon\, x}{p_1(x) + p_2(x) + \cdots + p_n(x) + \delta}\right) = \frac{\varepsilon\, p_i(x)}{p_1(x) + p_2(x) + \cdots + p_n(x) + \delta} < \varepsilon,$$

επομένως

$$f\left(\frac{\varepsilon\, x}{p_1(x) + p_2(x) + \cdots + p_n(x) + \delta}\right) < 1,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$f(x) \leq \frac{1}{\varepsilon}\left(p_1(x) + p_2(x) + \cdots + p_n(x) + \delta\right).$$

Το δ ήταν τυχόν, άρα έπεται η εκτίμηση, με $M = 1/\varepsilon$.

Το αντίστροφο έπεται από την Πρόταση 6.2. □

6.3 Μετρικοποιησιμότητα, χώροι με νόρμα

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε πότε ένας τοπικά κυρτός χώρος είναι μετρικοποιήσιμος, και πότε η τοπολογία του επάγεται από νόρμα.

Πρόταση 6.13. *Έστω X γραμμικός χώρος, και $\mathcal{P} = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία αριθμήσιμη οικογένεια ημινορμών η οποία διαχωρίζει τα στοιχεία του X. Για $x, y \in X$, ορίζουμε*

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}.$$

Τότε η d είναι μετρική στον X, και επάγει την τοπολογία που επάγει η $\mathcal{P}$. Επομένως, ένας τοπικά κυρτός χώρος είναι μετρικοποιήσιμος αν και μόνο αν η τοπολογία του επάγεται από μία αριθμήσιμη οικογένεια ημινορμών.

Απόδειξη. Θα δείξουμε το ευθύ: έστω ότι ο $(X, \mathcal{T})$ είναι μετρικοποιήσιμος, με μετρική d. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $\{x : d(x, 0) < 1/n\}$ είναι ανοικτό και περιέχει το 0, άρα υπάρχουν $\varepsilon_n \in \mathbb{N}$ και ημινόρμες $p_{n,1}, \dots p_{n,k_n}$ τέτοιες ώστε

$$\bigcap_{i=1}^{k_n} \{x \in X : |p_{n,i}(x)| < \varepsilon_n\} \subseteq \{x \in X : d(x, 0) < 1/n\}.$$

Θέτουμε

$$q_n = \frac{1}{\varepsilon_n}(p_{n,1} + \dots + p_{n,k_n}),$$

και θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{P}'$ όλων των ημινορμών q_n για $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τον τοπικά κυρτό χώρο $(X, \mathcal{T}')$ που επάγει η $\mathcal{P}'$ στον X.

Αρχικά, κάθε q_n είναι συνεχές στον $(X, \mathcal{T})$, αφού είναι γραμμικός συνδυασμός συνεχών ημινορμών, επομένως $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

Αν τώρα (x_i) είναι μία ακολουθία στον X με $x_i \to x$ στον $(X, \mathcal{T}')$, τότε $q_n(x_i - x) \to 0$ για κάθε n, αφού οι $q_n : (X, \mathcal{T}') \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς. Έστω $\varepsilon > 0$, και επιλέγουμε $n_0 > \varepsilon^{-1}$. Αφού $q_{n_0}(x_i - x) \to 0$, υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, αν $i \geq i_0$, $q_{n_0}(x_i - x) < 1$. Τότε $d(x_i - x, 0) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ για κάθε $i \geq i_0$, άρα $x_i \to x$ στον $(X, \mathcal{T})$. Άρα η $\mathcal{T}'$ ταυτίζεται με την $\mathcal{T}$, και επάγεται από αριθμήσιμο το πλήθος ημινόρμες. □

Αν X είναι χώρος με νόρμα, ένα σύνολο B είναι φραγμένο αν το $\{x \in X : \|x\| < 1\}$ είναι φραγμένο. Η γενίκευση αυτής της ιδιότητας σε τοπολογικούς γραμμικούς χώρους είναι η ακόλουθη.

Ορισμός 6.14. Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος. Ένα υποσύνολο B του X ονομάζεται φραγμένο, αν για κάθε ανοικτό $U \subseteq X$ με $0 \in U$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\varepsilon B \subseteq U$.

Παράδειγμα 6.15. Οι αντίστροφες εικόνες του $(-\infty, 1)$ μέσω νορμών είναι φραγμένα σύνολα. Αυτό όμως παύει να ισχύει για ημινόρμες: έστω ο τοπικά κυρτός χώρος $C(\mathbb{R})$, με την τοπολογία που επάγεται όπως στο Παράδειγμα 6.10, και θεωρούμε την ημινόρμα $p = p_{[0,1]}$, δηλαδή

$$p(f) = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Από τον ορισμό, το σύνολο $B = \{f \in C(\mathbb{R}) : p(f) < 1\}$ είναι ανοικτό. Όμως, το B δεν είναι φραγμένο (*γιατί;*).

Σε χώρους με νόρμα, η προηγούμενη έννοια ταυτίζεται με την κλασσική έννοια του φραγμένου συνόλου. Επιπλέον, η ανοικτή μοναδιαία μπάλα του X μας δείχνει ότι υπάρχει μη κενό, ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του X. Το γεγονός αυτό όμως παύει να ισχύει σε γενικούς τοπολογικούς γραμμικούς χώρους, και η ύπαρξη ενός μη κενού, ανοικτού και φραγμένου υποσυνόλου του X χαρακτηρίζει τους τοπικά κυρτούς χώρους των οποίων η τοπολογία επάγεται από νόρμα. Αρχικά δείχνουμε τα εξής λήμματα.

Λήμμα 6.16. *Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος. Ένα σύνολο $B \subseteq X$ είναι φραγμένο, αν και μόνο αν για κάθε $U \subseteq X$ ανοικτό με $0 \in U$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $\delta \in (0, \varepsilon]$, $\delta B \subseteq U$.*

Απόδειξη. Για το ευθύ, έστω $U \subseteq X$ ανοικτό με $0 \in U$, τότε από το Λήμμα 6.5 υπάρχει balanced ανοικτό $V \subseteq U$ με $0 \in V$. Από τον ορισμό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\varepsilon B \subseteq V$, και τότε, αν $0 < \delta \leq \varepsilon$,

$$\delta B = \frac{\delta}{\varepsilon} \varepsilon B \subseteq \frac{\delta}{\varepsilon} V \subseteq V \subseteq U,$$

αφού το V είναι balanced και $\frac{\delta}{\varepsilon} \leq 1$.

Το αντιστροφο προκύπτει από τον ορισμό. □

Λήμμα 6.17. *Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος. Ένα σύνολο $B \subseteq X$ είναι φραγμένο, αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο B και κάθε $a_n \to 0$ ισχύει ότι $a_n x_n \to 0$. Ειδικότερα, μεταφορές φραγμένων συνόλων είναι φραγμένα σύνολα.*

Απόδειξη. Άσκηση. □

Πρόταση 6.18. *Έστω X τοπικά κυρτός χώρος. Αν υπάρχει μη κενό και φραγμένο ανοικτό υποσύνολο του X, τότε υπάρχει νόρμα στον X η οποία επάγει την τοπολογία.*

Απόδειξη. Έστω $U \subseteq X$ μη κενό, ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του X. Έστω $x \in U$, και θεωρούμε το σύνολο $V = U - x$. Τότε $0 \in V$, το V είναι ανοικτό, και είναι επίσης φραγμένο, από το Λήμμα 6.17. Ο X είναι τοπικά κυρτός, άρα υπάρχουν ημινόρμες $p_1, \ldots p_n$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |p_i(x)| < \varepsilon\} \subseteq V.$$

Θέτουμε

$$q(x) = \frac{1}{\varepsilon} \left(p_1(x) + \ldots p_n(x) \right).$$

Τότε η q είναι ημινόρμα, και αν $q(x) < 1$, θα ισχύει ότι $x \in V$. Άρα, αν $V' = [q < 1]$, το V' είναι φραγμένο και ανοικτο υποσύνολο του X.

Θα αποδείξουμε ότι η q είναι νόρμα: έστω $x \in X$ με $x \neq 0$. Ο X είναι T_2, άρα υπάρχουν W_0, W_x ξένα και ανοικτά σύνολα με $0 \in W_0$ και $x \in W_x$. Το V' είναι φραγμένο, άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\delta V' \subseteq W_0$. Αφού $x \notin W_0$, έχουμε ότι $x \notin \delta V'$. Όμως $\delta V' = [q < \delta]$, άρα $q(x) \geq \delta$, και η q είναι νόρμα.

Τέλος, θα δείξουμε ότι η q νόρμα επάγει την ίδια τοπολογία στον X: αρχικά, αφού η q είναι συνεχής στην αρχική τοπολογία, έπεται ότι κάθε q-ανοικτό σύνολο είναι ανοικτό. Αντιστρόφως, αν p είναι μία από τις αρχικές ημινόρμες, τότε το σύνολο $[p < 1]$ είναι ανοικτο και περιέχει το 0, άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\delta V' \subseteq [p < 1]$. Επομένως $[q < \delta] \subseteq [p < 1]$, άρα $p \leq \delta^{-1} q$, και από την Πρόταση 6.1, η p είναι συνεχής στον (X, q). Άρα κάθε ανοικτό σύνολο είναι q-ανοικτό, και οι δύο τοπολογίες ταυτίζονται. □

Ισχύει επίσης το εξής θεώρημα σε γενικούς τοπολογικούς γραμμικούς χώρους.

Θεώρημα 6.19 (Kolmogorov's normability criterion)**.** *Ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος X έχει τοπολογία που επάγεται από νόρμα, αν και μόνο αν είναι T_1 και υπάρχει κυρτή και φραγμένη περιοχή του 0.*

6.4 Εφαρμογές του Θεωρήματος Hahn-Banach

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Hahn-Banach σε τοπολογικούς γραμμικούς χώρους, και θα δείξουμε τα αντίστοιχα διαχωριστικά θεωρήματα. Τέλος, εστιάζοντας σε τοπικά κυρτούς χώρους, θα δείξουμε την κλασσική ιδιότητα ύπαρξης πληθώρας στοιχείων του δϋικού ενός τοπικά κυρτού χώρου.

Αρχικά, χρειαζόμαστε την αντιστοίχιση κυρτών συνόλων με υπογραμμικά συναρτησοειδή. Η επόμενη πρόταση είναι η αντίστοιχη του Λήμματος 2.17.

Πρόταση 6.20. *Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος, και έστω $U \subseteq X$ ανοικτό και κυρτό σύνολο, με $0 \in U$. Αν ορίσουμε*

$$q_U(x) = \inf\{t \geq 0 : x \in tU\},$$

τότε το q είναι ένα μη αρνητικό, συνεχές, υπογραμμικό συναρτησοειδές, και $U = [q_U < 1]$.

Όπως και στο πλαίσιο χώρων Banach, ένα κλειστό υπερεπίπεδο είναι ένα σύνολο της μορφής $[f = a]$, όπου $f \in X^*$ και $a \in \mathbb{R}$. Μέσω της αντιστοιχίας ανοικτών και κυρτών συνόλων με υπογραμμικά συναρτησοειδή, και υπερεπιπέδων με συνεχή γραμμικά συναρτησοειδή, έχουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 6.21. *Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος, και $U \subseteq X$ μη κενό, ανοικτό και κυρτό, με $0 \notin U$. Τότε υπάρχει $f \in X^*$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in U$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη της Πρότασης 2.18: έστω $x_0 \in U$, και θέτουμε $V = x_0 - U$. Το V είναι ανοικτό, με $0 \in V$ και $x_0 \notin V$. Από την Πρόταση 6.20, υπάρχει μη αρνητικό, υπογραμμικό και συνεχές συναρτησοειδές q_V με $V = [q_V < 1]$. Αφού $x_0 \notin V$, $q(x_0) \geq 1$.

Θεωρούμε τον γραμμικό υπόχωρο $Y = \{ax_0 : x \in \mathbb{R}\}$, και ορίζουμε $f_0 : Y \to \mathbb{R}$ με $f_0(ax_0) = aq(x_0)$. Τότε $f_0 \leq q$ στον Y. Από το Θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές το οποίο επεκτείνει το f_0 και $f \leq q$ στον . Τότε, για κάθε $x \in U$, το $x_0 - x \in V$, άρα

$$1 \leq q(x_0) = f(x_0) = f(x_0 - x) + f(x) < 1 + f(x),$$

άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in U$. Επιπλέον, $|f(x)| \leq \max\{q(x), q(-x)\}$, άρα $f \in X^*$. □

Θεώρημα 6.22. *Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος, και $A, B \subseteq X$ μη κενά, ξένα και κυρτά υποσύνολα του X. Αν το A είναι ανοικτό, τότε υπάρχει κλειστό υπερεπίπεδο που διαχωρίζει τα A, B. Αν επιπλέον και το B είναι ανοικτο, τότε τα A, B διαχωρίζονται γνησίως.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη της Πρότασης 2.18. □

Τα προηγούμενα θεωρήματα ισχύουν σε γενικούς τοπολογικούς γραμμικούς χώρους, αλλά μπορεί να μην υπάρχει κανένα σύνολο το οποίο να ικανοποιεί τις δεδομένες συνθήκες.

Παράδειγμα 6.23. Έστω $X = L^p(0, 1)$, με μετρική όπως στο Παράδειγμα 6.3. Έστω ότι υπάρχει μη κενό ανοικτό, κυρτό και γνήσιο υποσύνολο U του X. Μεταφέροντας το U μπορουμε να υποθέσουμε ότι $0 \notin U$, και τότε το Θεώρημα 6.21 μας δείχνει ότι υπάρχει $f \in X^*$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in U$. Αυτό όμως είναι άτοπο από το Παράδειγμα 6.3, οπότε κάθε μη κενό ανοικτό και κυρτό υποσύνολο του X είναι *όλος* ο X.

Το επόμενο βήμα είναι ο διαχωρισμός κλειστών και κυρτών υποσυνόλων από συμπαγή και κυρτά.

Λήμμα 6.24. *Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος, $K \subseteq X$ συμπαγές και $V \subseteq X$ ανοικτό, με $K \subseteq V$. Τότε, υπάρχει ανοικτή περιοχή U του 0 με $K + U \subseteq V$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{U}$ το σύνολο των ανοικτών περιοχών του 0. Έστω ότι το ζητούμενο δεν ισχύει, τότε για κάθε $U \in \mathcal{U}$ υπάρχουν $x_U \in K, y_U \in U$ με $x_U + y_U \in X \setminus V$. Στο $\mathcal{U}$ ορίζουμε τη διάταξη $U_1 \leq U_2$ αν $U_2 \supseteq U_2$, και τότε τα $(x_U), (y_U)$ είναι δίκτυα στον X, με το $x_U \to 0$. Το K είναι συμπαγές, άρα υπάρχει υποδίκτυο του (x_U) το οποίο συγκλίνει σε κάποιο $x \in K$. Τότε, το αντίστοιχο υποδίκτυο της $(x_U + y_U)$ συγκλίνει στο x, και αφού το $X \setminus V$ είναι κλειστό έχουμε ότι $x \in X \setminus V$,το οποίο είναι άτοπο. □

Στο επόμενο θεώρημα εμφανίζεται για πρώτη φορά η υπόθεση ότι ο χώρος είναι τοπικά κυρτός.

Θεώρημα 6.25. *Έστω X τοπικά κυρτός χώρος, και $A, B \subseteq X$ μη κενά και ξένα υποσύνολα του X, με το A κλειστό και το B συμπαγές. Τότε, τα A, B διαχωρίζονται αυστηρά.*

Απόδειξη. Αφού $B \subseteq X \setminus A$, από το προηγούμενο λήμμα υπάρχει ανοικτή περιοχή U του 0 με $B + U \subseteq X \setminus A$. Ο X είναι τοπικά κυρτός, άρα υπάρχει ημινόρμα p τέτοια ώστε $[p < 1] \subseteq U$. Έστω $U_0 = [p < 1/2]$, τότε $(A + U_0) \cap (B + U_0) = \varnothing$, και τα $A + U_0, B + U_0$ είναι ξένα, ανοικτά και κυρτά, άρα διαχωρίζονται γνησίως. Επομένως, από τη συμπάγεια του K, τα A, B διαχωρίζονται αυστηρά. □

Ως πόρισμα, έχουμε την ύπαρξη πληθώρας συναρτησοειδών στον X^*.

Πόρισμα 6.26. *Έστω X τοπικά κυρτός χώρος, $x_0 \in X$, και $Y \subseteq X$ ένας κλειστός υπόχωρος με $x_0 \notin Y$. Τότε υπάρχει $f \in X^*$ με $f(x_0) = 1$ και $f(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$.*

6.5 Το θεώρημα Krein-Milman

Έστω X γραμμικός χώρος, και $K \subseteq X$ένα κυρτό υποσύνολο του . Ένα σημείο $x \in K$ ονομάζεται ακραίο σημείο, αν δεν μπορεί να γραφεί σαν "γνήσιος" κυρτός συνδυασμός στοιχείων του K διαφορετικών του x: αν $x = \lambda y + (1 - \lambda z)$ για $\lambda \in (0, 1)$ και $y, z \in K$, τότε $y = z = x$.

Το σύνολο των ακραίων σημείων του K συμβολίζεται με $\text{ext}(K)$.

Ένα υποσύνολο $A \subseteq K$ ονομάζεται ακραίο, αν δεν υπάρχει στοιχείο του το οποίο να μπορεί να γραφτεί ως γνήσιος γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $K \setminus A$: αν $\lambda \in (0, 1)$ και $y, z \in K$ με $\lambda x + (1 - \lambda y) \in A$, τότε $y, z \in A$.

Αν $X = \mathbb{R}^2$ και $K \subseteq X$ είναι ένα κυρτό πολύγωνο, τότε το $\text{ext}(K)$ είναι το σύνολο των κορυφών του K, και κάθε ακμή του K είναι ακραίο υποσύνολο του K.

Πρόταση 6.27. *Έστω X γραμμικός χώρος, $K \subseteq X$ κυρτό υποσύνολο του X και $a \in X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

i) $a \in \text{ext}(K)$.

ii) Αν $x, y \in K$ με $a = \frac{x+y}{2}$, τότε είτε $x \notin K$, είτε $y \notin K$, είτε $x = y = a$.

iii) Αν $x, y \in K$, $\lambda \in (0, 1)$ και $a = \lambda x + (1 - \lambda y)$, τότε είτε $x \notin K$, είτε $y \notin K$, είτε $x = y = a$.

iv) Αν $x_1, \ldots x_n \in K$ και $a \in \text{conv}(\{x_1, \ldots x_n\})$, τότε $a = x_i$ για κάποιο i.

v) Το $K \setminus \{a\}$ είναι κυρτό.

Απόδειξη. Άσκηση. □

Είναι απλό να δείξουμε ότι σε κάθε χώρο με νόρμα, $\text{ext}(B_X) \subseteq \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Όμως, υπάρχουν χώροι για τους οποίους η κλειστή μοναδιαία μπάλα δεν έχει ακραία σημεία.

Παράδειγμα 6.28. Αν $X = L^1(0,1)$, τότε η $B_X = \{f \in L^1(0,1) : \int_0^1 |f| = 1\}$ δεν έχει ακραία σημεία. Πράγματι, έστω $f \in B_X$, τότε υπάρχει $a \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^a f = \int_a^1 f = \frac{1}{2}.$$

Έστω $f_1 = 2f\chi_{(0,a)}$ και $f_2 = 2f\chi_{(a,1)}$, τότε $f_1, f_2 \in B_X$, $f_1 \neq f, f_2 \neq f$, και

$$f = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2.$$

Πρόταση 6.29. *Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος, τέτοιος ώστε ο X^* να διαχωρίζει σημεία του X. Αν το $K \subseteq X$ είναι μη κενό και συμπαγές υποσύνολο του X, τότε* $\text{ext}(K) \neq \varnothing$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 6.27, θέλουμε να βρούμε το μικρότερο μη κενό ακραίο υποσύνολο του K. Έτσι, ορίζουμε $\mathcal{E}$ την οικογένεια των μη κενών, ακραίων, κλειστών υποσυνόλων του K, και για $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$, τη σχέση

$$E_1 \leq E_2, \quad \text{αν } E_1 \supseteq E_2.$$

Το $\mathcal{E}$ είναι μη κενό, αφού $K \in \mathcal{E}$. Επίσης, η προηγούμενη σχέση ορίζει μερική διάταξη στο $\mathcal{E}$. Θα δείξουμε τώρα ότι κάθε αλυσίδα έχει μεγιστικό στοιχείο: έστω $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$ μία αλυσίδα, και θέτουμε

$$A = \bigcap_{E \in \mathcal{E}_0} E.$$

Το A είναι ακραίο υποσύνολο του K, αφού το $\mathcal{E}_0$ είναι αλυσίδα. Επίσης, το A είναι κλειστό. Επιπλέον, κάθε πεπερασμένη υποοικογένεια της $\mathcal{E}_0$ έχει μη κενή τομή, άρα απο την ιδιότητα πεπερασμένων τομών, το A είναι μη κενό.

Από το Λήμμα του Zorn, υπάρχει μεγιστικό στοιχείο $A \subseteq K$. Ισχυριζόμαστε ότι το A είναι μονοσύνολο: αν όχι, έστω $x, y \in A$ με $x \neq y$. Από την υπόθεση, υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq f(y)$. Θέτουμε

$$B = \{z \in A : f(z) = \min_A f\}.$$

Το A είναι συμπαγές, άρα το $B \neq \varnothing$. Επιπλέον, το B είναι ακραίο υποσύνολο του K: αν $\lambda \in (0,1)$ και $z, w \in K$ με $\lambda z + (1 - \lambda w) \in B$, τότε αναγκαστικά $z, w \in A$, αφού το A είναι ακραίο, και

$$\lambda f(z) + (1 - \lambda) f(w) = \min_A f,$$

άρα $f(z) = f(w) = \min_A f$, επομένως $z, w \in B$. Αφού όμως $f(x) \neq f(y)$, έπεται ότι το B είναι γνήσιο υποσύνολο του A, το οποίο είναι άτοπο λόγω της μεγιστικότητας του A. Άρα το A είναι μονοσύνολο, και αν $A = \{x\}$, το $x \in K$ είναι ακραίο σημείο του K. □

Ως εφαρμογή της προηγούμενης πρότασης έχουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 6.30. *Δεν υπάρχει χώρος Banach για τον οποίο ο $L^1(0,1)$ να είναι ο δϋικός του.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει τέτοιος χώρος Banach. Από το Θεώρημα Banach-Alaoglou, η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $L^1(0,1)$, είναι w^* συμπαγής, και αφού ο προηγούμενος χώρος είναι τοπικά κυρτός, η προηγούμενη πρόταση δείχνει ότι υπάρχει ένα ακραίο σημείο της μπάλας. Αυτό όμως είναι άτοπο, από το Παράδειγμα 6.28. □

Θεώρημα 6.31 (Θεώρημα Krein-Milman)**.** *Έστω X τοπικά κυρτός χώρος, και $K \subseteq X$ ένα μη κενό, συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X. Τότε,*

$$K = \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))}.$$

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει $x \in K \setminus \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))}$. Από την Πρόταση , τα $\{x\}, \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))}$ διαχωρίζονται γνησίως: υπάρχει $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\sup\{f(y) : y \in \mathrm{ext}(K)\} = \sup\{f(y) : y \in \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))\} < \lambda < f(x).$$

Ορίζουμε $K_0 = \{y \in K : f(y) = \max_K f\}$. Τότε το K_0 είναι μη κενό, συμπαγές, και κυρτό. Επίσης, λόγω του διαχωρισμού, $K_0 \cap \mathrm{ext}(K) = \varnothing$. Από την Πρόταση 6.29, υπάρχει $z \in \mathrm{ext}(K_0)$, και όπως στην απόδειξη της Πρότασης 6.29, έχουμε ότι $z \in \mathrm{ext}(K)$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού $K_0 \cap \mathrm{ext}(K) = \varnothing$. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] Haim Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Universitext, Springer, 2011.

[2] John Conway, *A course in Functional Analysis.* Second Edition. Graduate texts in Mathematics, Springer, 2007.

[3] Απόστολος Γιαννόπουλος, *Μεταπτυχιακή Ανάλυση ΙΙ* (σημειώσεις του μαθήματος). Αθήνα, 2007.

[4] Walter Rudin, *Functional Analysis.* Second Edition. McGraw-Hill, 1991.

[5] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση.* Εκδόσεις Συμμετρία, 1997.