Σημειώσεις Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων

Γιώργος Σακελλάρης

Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

1.1 Γενικά

Μία μερική διαφορική εξίσωση είναι μία εξίσωση που περιέχει μία άγνωστη συνάρτηση n μεταβλητών, όπου $n \geq 2$, και την σχετίζει με τις μερικές της παραγώγους.

Γνωρίζουμε ότι, αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $u : \Omega \to \mathbb{R}$, τότε για $i = 1, \dots n$, η i-οστή μερική παράγωγος της u στο $x_0 \in \Omega$ ορίζεται ως

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + he_i) - u(x_0)}{h},$$

εάν το όριο αυτό υπάρχει. Εδώ, το e_i είναι το διάνυσμα του οποίου η i-οστή συντεταγμένη είναι ίση με 1, και όλες οι άλλες συντεταγμένες είναι ίσες με 0.

Υπάρχουν πολλοί συμβολισμοί για τις μερικές παραγώγους. Ενδεικτικά, αναφέρουμε τους

$$\frac{\partial u}{\partial x_i},\ \partial_i u,\ \partial_{x_i} u,\ u_{x_i},\ u_i.$$

Αν η u είναι ορισμένη σε υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε έχει n το πλήθος μερικές παραγώγους, τις $\partial_1 u, \dots \partial_n u$. Τις παραγώγους αυτές τις οργανώνουμε στο ανάδελτα (gradient), που είναι το διάνυσμα με συντεταγμένες τις μερικές παραγώγους, έτσι ώστε

$$\nabla u(x) = (\partial_1 u(x), \dots \partial_n u(x)) \in \mathbb{R}^n,$$

για κάθε $x \in \Omega$.

Οι παράγωγοι 2ης τάξης της u είναι οι μερικές παράγωγοι των μερικών παραγώγων (αν υπάρχουν τα αντίστοιχα όρια). Αυτές είναι n^2 το πλήθος, τις συμβολίζουμε με $\partial_{ij} u$ για $i, j = 1, \dots n$, και συνήθως τις οργανώνουμε σε έναν πίνακα, την Εσιανή (Hessian) της u:

$$D^2 u = \begin{pmatrix} \partial_{11} u & \partial_{12} u & \dots & \partial_{1n} u \\ \partial_{21} u & \partial_{22} u & \dots & \partial_{2n} u \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1} u & \partial_{n2} u & \dots & \partial_{nn} u \end{pmatrix}$$

Γενικότερα, όταν $k \geq 1$, οι μερικές παράγωγοι k τάξης της u είναι n^k το πλήθος, τις οποίες τις οργανώνουμε σε μία "δομή" με n^k στοιχεία, η οποία συμβολίζεται με $D^k u$.

Έτσι, μία μδε k τάξης είναι μία έκφραση της μορφής

$$F(D^k u, D^{k-1} u, \dots D^2 u, \nabla u, u, x) = 0,$$

όπου $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και η $u : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι η άγνωστη συνάρτηση. Η *τάξη* μιας μδε η μέγιστης τάξης μερική παράγωγος που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Για να συμβολίσουμε πολλαπλές μεικτές παραγώγους μίας συνάρτησης $u : \Omega \to \mathbb{R}$, όπου το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό των *πολυδεικτών*.

1. Ένας πολυδείκτης (multiindex) τάξης n είναι ένα διάνυσμα α της μορφής $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$, όπου $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, για $i = 1, \dots n$.

2. Το *μήκος* ενός πολυδείκτη α είναι το άθροισμα των συντεταγμένων του, και συμβολίζεται με $|\alpha|$. Επομένως,
$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

3. Αν $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$, τότε η α μερική παράγωγος της u είναι η
$$D^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n} u,$$
όπου ορίζουμε $\partial_i^0 u = u$, για κάθε i.

Για παράδειγμα, αν $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, τότε $\partial_1^2 \partial_3 u = D^\alpha u$ για $\alpha = (2, 0, 1, 0)$. Τότε, το μήκος του πολυδείκτη μας δείχνει το συνολικό πλήθος μερικών παραγώγων που θεωρούμε.

Μία πολύ σημαντική κλάση μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι οι *γραμμικές εξισώσεις,* οι οποίες είναι σχέσεις της μορφής
$$\sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x),$$
όπου οι c_α, f είναι δοσμένες συναρτήσεις. Η εξίσωση λέγεται *ομογενής,* αν $f \equiv 0$.

1.2 Παραδείγματα μδε

Κάποια πολύ σημαντικά παραδείγματα μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι τα εξής.

1. Η εξίσωση της μεταφοράς:
$$\partial_t u + b \nabla u = 0.$$
Εδώ το $b \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα (γνωστό) διάνυσμα, η άγνωστη συνάρτηση u είναι ορισμένη σε υποσύνολο του $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, το ανάδελτα θεωρείται μόνο ως προς τις πρώτες n μεταβλητές, και η μερική παράγωγος ως προς t θεωρείται ως προς την τελευταία μεταβλητή. Επιπλέον, το γινόμενο $b\nabla u$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων b και ∇u. Η εξίσωση αυτή είναι 1ης τάξης, και γραμμική.

2. Η εξίσωση του Burgers:
$$\partial_t u + u \partial_x u = 0.$$
Εδώ η άγνωστη συνάρτηση u είναι ορισμένη σε υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, του οποίου τα στοιχεία τα γράφουμε ως (x, t). Η εξίσωση αυτή είναι 1ης τάξης, και δεν είναι γραμμική.

3. Η εξίσωση του Laplace:
$$\Delta u = 0, \text{ όπου } \Delta u = \sum_{i=1}^n \partial_{ii} u.$$
Ο Δ είναι ο *τελεστής Laplace*. Εδώ η άγνωστη συνάρτηση είναι ορισμένη σε υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η εξίσωση αυτή είναι 2ης τάξης, και γραμμική.

   Οι λύσεις της εξίσωσης του Laplace ονομάζονται *αρμονικές συναρτήσεις.*

4. Η εξίσωση της θερμότητας:
$$\partial_t u - \Delta u = 0.$$
Εδώ η άγνωστη συνάρτηση είναι ορισμένη σε υποσύνολο του $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, ο τελεστής Laplace θεωρείται μόνο πάνω στις πρώτες n μεταβλητές, και η μερική παράγωγος ως προς t θεωρείται ως προς την τελευταία μεταβλητή. Η εξίσωση αυτή είναι 2ης τάξης, και γραμμική.

Αν θεωρήσουμε ότι το t μοντελοποιεί χρόνο, και η u λύνει την εξίσωση της θερμότητας και δεν εξαρτάται από τον χρόνο, τότε $\partial_t u = 0$, επομένως η u είναι αρμονική συνάρτηση. Υπό αυτή την έννοια, η εξίσωση της θερμότητας είναι πιο "γενική" από την εξίσωση του Laplace.

5. Η κυματική εξίσωση:

$$\partial_{tt} u - \Delta u = 0.$$

Εδώ το πλαίσιο είναι όπως στην εξίσωση της θερμότητας: η άγνωστη συνάρτηση είναι ορισμένη σε υποσύνολο του $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, ο τελεστής Laplace θεωρείται μόνο πάνω στις πρώτες n μεταβλητές, και η δεύτερη μερική παράγωγος ως προς t θεωρείται ως προς την τελευταία μεταβλητή. Η εξίσωση αυτή είναι 2ης τάξης, και γραμμική.

Θα μελετήσουμε κυρίως αυτές τις εξισώσεις, όπως και παραλλαγές τους.

2 Εξισώσεις 1ης τάξης

2.1 Εισαγωγή

Οι εξισώσεις πρώτης τάξης σχετίζουν τις πρώτες μερικές παραγώγους μία άγνωστης συνάρτησης u με την u και άλλες συναρτήσεις. Στις δύο διαστάσεις, όπου η u θα εξαρτάται από τα x, y, η γενική σχέση που περιγράφει εξισώσεις πρώτης τάξης σε ένα χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι η

$$F(\partial_x u, \partial_y u, u, x, y) = 0, \tag{2.1}$$

όπου η F είναι μία συνάρτηση $F : \mathbb{R}^3 \times \Omega \to \mathbb{R}$, και $(x, y) \in \Omega$. Αντίστοιχα, στις τρεις διαστάσεις, η γενική σχέση που περιγράφει εξισώσεις πρώτης τάξης σε ένα χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι η

$$G(\partial_x u, \partial_y u, \partial_z u, u, x, y, z) = 0, \tag{2.2}$$

όπου η G είναι μία συνάρτηση $G : \mathbb{R}^4 \times \Omega \to \mathbb{R}$, και $(x, y, z) \in \Omega$.

Για να έχουν νόημα οι όροι οι οποίοι εμφανίζονται στις σχέσεις (2.1) και (2.2), πρέπει η u να έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Απαιτώντας λίγη περίσσότερη ομαλότητα από την u, ονομάζουμε *λύση* της μερικής διαφορικής εξίσωσης (2.1) μία συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $u \in C^1(\Omega)$ που ικανοποιεί την (2.1) κατά σημείο (αντίστοιχα για την (2.2)).

Οι μδε έχουν τις ρίζες τους στην περιγραφή διάφορων φυσικών φαινομένων. Σε αυτές τις περιπτώσεις, θέλουμε οι λύσεις που θα βρούμε να ανταποκρίνονται στην "πραγματικότητα" που παρατηρούμε, οπότε ζητάμε να ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

i) Ύπαρξη λύσης: δοσμένης μίας εξίσωσης, θέλουμε να υπάρχει λύση.

ii) Μοναδικότητα λύσης: δοσμένης μίας εξίσωσης, θέλουμε η λύση της να είναι μοναδική.

Υπάρχει μία τρίτη ιδιότητα, η συνεχής εξάρτηση από τα αρχικά δεδομένα, η οποία μας οδηγεί σε καλώς τεθειμένα προβλήματα (κατά Hadamard), αλλά δεν θα ασχοληθούμε με αυτή την ιδιότητα σε αυτό το μαθημα.

Ως προς το ζήτημα της μοναδικότητας, μία πρώτη ιδέα παίρνουμε από τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, όπου γνωρίζουμε ότι μία διαφορική εξίσωση δεν αρκεί για να μα οδηγήσει σε μοναδική λύση. Για παράδειγμα, η εξίσωση $y' = 0$ για $y : (0, 1) \to \mathbb{R}$ έχει ως λύσεις όλες τις σταθερές συναρτήσεις. Η μοναδικότητα όμως έπεται θεωρώντας ένα πρόβλημα αρχικών τιμών: γνωρίζοντας την τιμή της y στο 0, και απαιτώντας η y να είναι συνεχής στο 0, οδηγούμαστε στη λύση $y = y(0)$.

Στις μδε, η κατάσταση είναι αντίστοιχη: για να έχουμε μοναδικότητα λύσης, ένας τρόπος είναι να γνωρίζουμε τη συνάρτηση σε ένα κομμάτι του συνόρου του Ω. Έτσι, θεωρούμε ένα *πρόβλημα συνοριακών τιμών*, όπου σε αυτή την περίπτωση, θέλουμε οι λύσεις της μδε να είναι συνεχείς μέχρι εκείνο το κομμάτι του συνόρου.

Για παράδειγμα, αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ και $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση, ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι το

$$\begin{cases} F(\partial_x u, \partial_y u, u, x, y) = 0, & (x,y) \in \Omega \\ u = f & \text{στο } \Gamma, \end{cases}$$

όπου $u \in C^1(\Omega) \cap C(\Omega \cup \Gamma)$. Εδώ, τα F, f, Ω, Γ είναι γνωστά, και η άγνωστη είναι η συναρτηση $u : \Omega \cup \Gamma \to \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2.1. Το απλούστερο παράδειγμα μδε σε δύο διαστάσεις είναι η εξίσωση που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $F(p, q, u, x, y) = q$, και είναι η

$$\partial_y u = 0, \tag{2.3}$$

στο χωρίο $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ για παράδειγμα. Η εξίσωση αυτή μας λέει ότι η συνάρτηση u δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή y, οπότε η u είναι συνάρτηση μόνο της x. Διαφορετικά, αν $x \in \mathbb{R}$ και $y > 0$, τότε

$$u(x,y) = u(x,1) + \int_1^y \partial_y u(x,s)\, ds = u(x,1),$$

οπότε η u εξαρτάται μόνο από το x.

Θεωρούμε τώρα το χωρίο $\Omega = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$, δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, και το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \partial_y u(x,y) = g(x), & (x,y) \in \Omega \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{2.4}$$

Λύση της εξίσωσης αυτής είναι οποιαδήποτε συνάρτηση $u \in C^1(U) \cap C(\overline{U})$ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση αυτή κατά σημείο. Για να βρούμε αυτή τη λύση, υπολογίζουμε

$$u(x,y) = u(x,0) + \int_0^y \partial_y(x,s)\, ds = u(x,0) + \int_0^y g(x)\, dx = f(x) + yg(x).$$

Επομένως, βλέπουμε ότι για να έχει το προηγούμενο πρόβλημα μία λύση $u \in C^1(U) \cap C(\overline{U})$, τότε αναγκαστικά

πρέπει να απαιτήσουμε ότι $f, g \in C^1(\mathbb{R})$.

Υπενθυμίζουμε τώρα τη γενική γραμμική μη ομογενή μδε σε δύο μεταβλητές, η οποία είναι η

$$a(x,y)\partial_x u + b(x,y)\partial_y u + c(x,y)u = d(x,y), \tag{2.5}$$

Για παράδειγμα, έχουμε την εξίσωση της μεταφοράς στις 2 διαστάσεις:

$$\partial_t u + c\partial_x u = 0,$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ είναι μία σταθερά. Στην εξίσωση αυτή το t (συνήθως) μοντελοποιεί τον χρόνο και το x σημεία στον χώρο, οπότε συνήθως θεωρούμε την εξίσωση αυτή στο χωρίο $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Επίσης, θέτοντας $c = 0$, οδηγούμαστε στην εξισωση (2.3).

Σε περισσότερες των δύο μεταβλητών, η εξίσωση της μεταφοράς είναι η

$$\partial_t u + b\nabla u = 0,$$

όπου $b \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα διάνυσμα. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, εδώ η άγνωστη συνάρτηση είναι ορισμένη σε ένα υποσύνολο του χωρίου $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, και το ανάδελτα ορίζεται στις μεταβλητές του $\mathbb{R}^n$, οπότε

$$\nabla u(x,t) = (\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, \dots \partial_{x_n} u) \in \mathbb{R}^n .$$

Θα δούμε δύο τρόπους επίλυσης γραμμικών εξισώσεων: τη μέθοδο των χαρακτηριστικών, καθώς και τη μέθοδο αλλαγής μεταβλητών.

2.2 Η μέθοδος των χαρακτηριστικών

Η μέθοδος των χαρακτηριστικών κατασκευάζει καμπύλες (τις χαρακτηριστικές καμπύλες) πάνω στις οποίες η μδε μετατρέπεται σε μία συνήθη διαφορική εξίσωση, μετατρέποντας έτσι την μδε σε ένα σύστημα συνηθών διαφορικών εξισώσεων.

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση (2.5), και έστω u μία λύση της. Για συναρτήσεις $x(s), y(s)$ που θα ορίσουμε στη συνέχεια, θέτουμε $z(s) = u(x(s), y(s))$. Τότε, υπολογίζουμε

$$z'(s) = x'(s)\partial_x u(x(s), y(s)) + y'(s)\partial_y u(x(s), y(s)).$$

Οπότε, αν ζητήσουμε να ισχύουν οι σχέσεις $x'(s) = a(x(s), y(s))$ και $y'(s) = b(x(s), y(s))$, θα έχουμε ότι

$$z' = a\partial_x u + b\partial_y u = d - cu,$$

απ'όπου προκύπτει το σύστημα των χαρακτηριστικών εξισώσεων

$$\begin{cases} x'(s) = a(x(s), y(s)) \\ y'(s) = b(x(s), y(s)) \\ z'(s) = d(x(s), y(s)) - c(x(s), y(s))u(x(s), y(s)). \end{cases} \tag{2.6}$$

Λύνοντας αυτό το σύστημα, βρίσκουμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες $(x(s), y(s))$ οι οποίες ικανοποιούν τις δύο πρώτες σχέσεις, και καταλήγουμε σε μία έκφραση για την συνάρτηση z, η οποία μας δίνει τις τιμές της συνάρτησης u πάνω στην καμπύλη $(x(s), y(s))$.

Παράδειγμα 2.2. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των χαρακτηριστικών για να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση της μεταφοράς

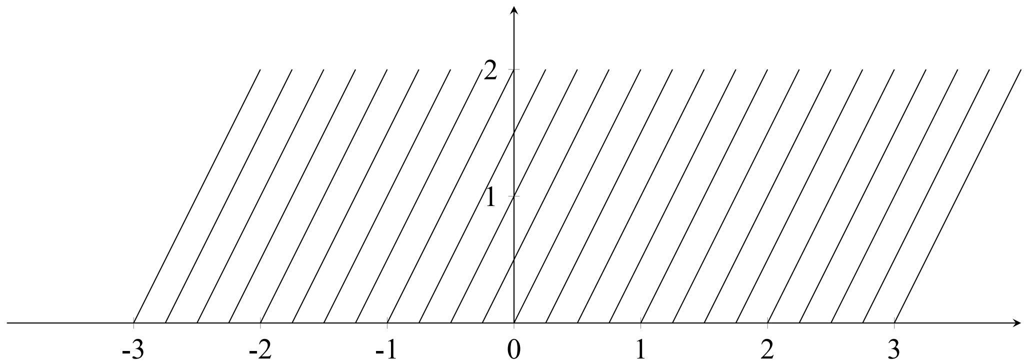
$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u = 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.7}$$

όπου $c \in \mathbb{R}$. Το σύστημα των χαρακτηριστικών εξισώσεων είναι το

$$\begin{cases} t'(s) = 1 \\ x'(s) = c \\ z'(s) = 0. \end{cases}$$

Γενικές λύσεις των δύο πρώτων εξισώσεων είναι οι $t(s) = s + c_1, x(s) = cs + c_2$, όπου c_1, c_2 σταθερές.

Το σύστημα αυτό μας δείχνει ότι, αν $x(s), y(s)$ είναι λύσεις των δύο πρώτων εξισώσεων, τότε η συνάρτηση $u(x(s), y(s)) = z(s)$ είναι σταθερή. Επειδή γνωρίζουμε τις τιμές της u στον άξονα των x, θέλουμε κάθε σημείο του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ να ανήκει σε μία χαρακτηριστική καμπύλη, η οποία να ξεκινάει από κάποιο σημείο του άξονα των x.



Σχήμα 1: Χαρακτηριστικές της εξίσωσης (2.7), $c = 1/2$.

Περιορίζοντας στην περίπτωση $c_1 = 0$, οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι της μορφής $(cs + c_2, s)$ όπου c_2 σταθερά. Αφού η u είναι σταθερή στις χαρακτηριστικές, εχουμε ότι η $u(cs+c_2, s)$ είναι σταθερά ως προς s. Επομένως,

$$u(cs + c_2, s) = u(c_2, 0) = f(c_2),$$

για κάθε σταθερά c_2, και για κάθε $s \geq 0$. Θετοντας τώρα $x = cs + c_2$ και $t = s$, έχουμε ότι $c_2 = x - ct$, επομένως

$$u(x, t) = f(x - ct).$$

Παράδειγμα 2.3. Η μέθοδος των χαρακτηριστικών εφαρμόζεται και σε μδε σε περισσότερες διαστάσεις. Για παράδειγμα, θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για τη μη ομογενή εξίσωση της μεταφοράς

$$\begin{cases} \partial_t u + b\nabla u = g, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.8}$$

όπου $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Για διανυσματική συνάρτηση $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ και πραγματική συνάρτηση $t : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, ορίζουμε $z(s) = u(x(s), t(s))$, και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} z'(s) &= \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} u(x(s), t(s)) x_i'(s) + t'(s) \partial_t u(x(s), t(s)) \\ &= x'(s) \cdot \nabla u(x(s), t(s)) + t'(s) \partial_t u(x(s), t(s)), \end{aligned}$$

όπου $x'(s) = (x_1'(s), \dots x_n'(s))$. Επομένως, αν ζητήσουμε $x'(s) = b$ και $t'(s) = 1$, θα έχουμε ότι $z'(s) = g(x(s), t(s))$, και το σύστημα των χαρακτηριστικών εξισώσεων είναι το

$$\begin{cases} t'(s) = 1 \\ x'(s) = b \in \mathbb{R}^n \\ z'(s) = g(x(s), t(s)). \end{cases}$$

Μια λύση των δύο πρώτων εξισώσεων είναι η $x(s) = bs + c$ και $t(s) = s$, όπου $c \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα. Τότε,

$$\begin{aligned} u(bs+c,s) = z(s) = z(0) + \int_0^s z'(r)\,dr = u(x(0),z(0)) + \int_0^s g(br+c,r)\,dr \\ = f(c) + \int_0^s g(br+c,r)\,dr. \end{aligned}$$

Θέτοντας $x = bs+c$ και $t = s$, καταλήγουμε στη σχέση $c = x-bt$, οπότε η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (2.8) είναι η

$$u(x,t) = f(x-bt) + \int_0^t g(x+b(r-t),r)\,dr. \tag{2.9}$$

Παρατήρηση 2.4. Στη διαδικασία λύσης μίας μδε μέσω της μεθόδου των χαρακτηριστικών, ο στόχος δεν είναι η εύρεση όλων των λύσεων του συστήματος (2.6) και η εύρεση όλων των χαρακτηριστικών καμπυλών, αλλά μας αρκούν κάποιες χαρακτηριστικές καμπύλες οι οποίες (ιδανικά) να καλύπτουν όλο το πεδίο ορισμού της άγνωστης συνάρτησης u. Για αυτόν τον λόγο, αφού οι καμπύλες της μορφής $(cs+c_2, s)$ για σταθερά $c_2 \in \mathbb{R}$ και $s \geq 0$ καλύπτουν το $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $c_1 = 0$ στο Παράδειγμα 2.2.

Αν το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων είναι περίπλοκο, μπορούμε να βρούμε καμπύλες ως προς x και όχι ως προς s, όπως και στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.5. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y\partial_x u - x\partial_y u + u = 0, & x,y>0 \\ u(x,0) = f(x), & x>0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Το σύστημα των χαρακτηριστικών εξισώσεων είναι το

$$\begin{cases} x'(s) = y(s) \\ y'(s) = -x(s) \\ z'(s) = -z(s). \end{cases} \tag{2.11}$$

Θα βρούμε χαρακτηριστικές καμπύλες αρχικά ως προς s, και έπειτα ως προς x.

1. 1ος τρόπος: βρίσκοντας καμπύλες ως προς s. Από τις δύο πρώτες εξισώσεις, έχουμε ότι

   $$x''(s) = y'(s) = -x(s),$$

   η οποία έχει γενική λύση την $x(s) = C_1\cos s + C_2 \sin s$. Περιορίζοντας στην $x(s) = C\sin s$, όπου $C>0$ σταθερά, έχουμε ότι $y(s) = C\cos s$. Επίσης, η γενική λύση της $z' = -z$ είναι η $z(s) = C'e^{-s}$, επομένως

   $$u(C\sin s, C\cos s) = z(s) = C'e^{-s}$$

   για κάθε $C, C' > 0$ και $s\in(0,\pi/2]$. Θέτοντας $s=\pi/2$, έχουμε ότι

   $$f(C) = u(C,0) = C'e^{-\pi/2},$$

   άρα $C' = f(C)e^{\pi/2}$, και $u(C\sin s, C\cos s) = f(C)e^{\pi/2-s}$ για κάθε $C>0$ και $s\in(0,\pi/2]$. Τώρα, για να βρούμε s, C τέτοια ώστε $(x,y) = (C\sin s, C\cos s)$, έχουμε ότι $C = \sqrt{x^2+y^2}$, και

   $$\tan s = \frac{\sin s}{\cos s} = \frac{x}{y},$$

   άρα $s = \arctan(x/y)$, επομένως

   $$u(x,y) = e^{\pi/2-\arctan(x/y)} f(\sqrt{x^2+y^2}) = e^{\arctan(y/x)} f(\sqrt{x^2+y^2}).$$

2. 2ος τρόπος: βρίσκοντας καμπύλες ως προς x. Ο τρόπος αυτός είναι χρήσιμος όταν είναι δύσκολο να βρούμε λύσεις των δύο πρώτων εξισώσεων ως προς s. Οπότε, αναζητούμε λύσεις της μορφής $g = g(x)$ για κάποια συνάρτηση g, θεωρώντας την x ως ανεξάρτητη μεταβλητή. Άτυπα, αφού ψάχνουμε χαρακτηριστικές καμπύλες, τότε $x' = y$ και $y' = -x$ (ως συναρτήσεις του s) άρα αναμένουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/ds}{dx/ds} = -\frac{x}{y},$$

άρα $g'(x) = -x/g(x)$, επομένως $g^2(x) + x^2 = C$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ότι

$$(y^2(s) + x^2(s))' = 2yy' + 2xx' = -2xy + 2xy = 0,$$

επομένως $y^2 + x^2 = C$. Άρα, για κάθε σταθερά $C > 0$, αναμένουμε ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι της μορφής $(x, \sqrt{C - x^2})$, για $x \in (0, \sqrt{C}]$.

Τώρα, θέτοντας $\tilde{z}(x) = u(x, g(x))$ για $g(x) = \sqrt{C - x^2}$, έχουμε ότι $\tilde{z}(x(s)) = z(s)$, και αναμένουμε άτυπα ότι

$$\frac{d\tilde{z}}{dx} = \frac{dz/ds}{dx/ds} = -\frac{z}{y} = -\frac{\tilde{z}}{g(x)}.$$

Πιο συγκεκριμένα, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\tilde{z}'(x) &= \partial_x u(x, g(x)) + g'(x)\partial_y u(x, g(x)) = \partial_x u(x, g(x) - \frac{x}{\sqrt{C - x^2}}\partial_y u(x, g(x))\\ &= \frac{1}{\sqrt{C - x^2}}\left(\sqrt{C - x^2}\partial_x u(x, g(x)) - x\partial_y u(x, g(x))\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{C - x^2}}\left(g(x)\partial_x u(x, g(x)) - x\partial_y u(x, g(x))\right) = -\frac{\tilde{z}(x)}{\sqrt{C - x^2}}.\end{aligned}$$

Για να λύσουμε την τελευταία εξίσωση, υπολογίζουμε

$$\int \frac{1}{\sqrt{C - x^2}}\,dx \overset{x=\sqrt{C}w}{=} \int \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}}\,dw = \arcsin w + C_0 = \arcsin(x/\sqrt{C}) + C_0,$$

επομένως $e^{\arcsin(x/\sqrt{C})}\tilde{z}(x) = C'$, και

$$u(x, \sqrt{C - x^2}) = \tilde{z}(x) = C'e^{-\arcsin(x/\sqrt{C})}.$$

Για να βρούμε την σταθερά C', θέτουμε $x = \sqrt{C}$, οπότε

$$f(\sqrt{C}) = u(\sqrt{C}, 0) = \tilde{z}(\sqrt{C}) = C'e^{-\arcsin(1)} = C'e^{-\pi/2}.$$

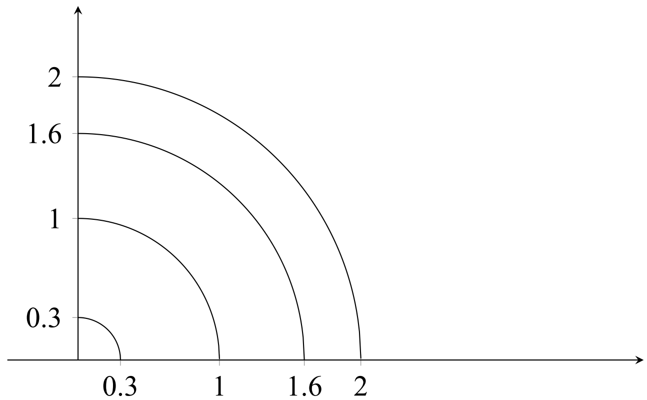
Επομένως, για κάθε $t > 0$,

$$u(x, \sqrt{C - x^2}) = f(\sqrt{C})e^{\pi/2 - \arcsin(x/\sqrt{C})}.$$

Αν θέσουμε $y = \sqrt{C - x^2}$, τότε $C = x^2 + y^2$, οπότε υπολογίζουμε

$$u(x, y) = e^{\pi/2 - \arcsin(x/\sqrt{x^2+y^2})}f(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

που ταυτίζεται με την προηγούμενη λύση.



Σχήμα 2: Χαρακτηριστικές της εξίσωσης (2.10).

Παράδειγμα 2.6. Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} yz\partial_x u + xz\partial_y u - 2xy\partial_z u = 0, & x, y, z > 0, z > y \\ u(x, y, y) = f(x, y), & x, y > 0. \end{cases}$$

Για να βρούμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες, θέτουμε

$$\begin{cases} x' = yz \\ y' = xz \\ z' = -2xy. \end{cases} \tag{2.12}$$

Θα βρούμε χαρακτηριστικές καμπύλες μόνο ως προς x, οπότε θέτουμε $y(s) = g_1(x(s))$ και $z = g_2(x(s))$. Τότε, άτυπα,

$$\frac{dg_1}{dx} = \frac{dy/ds}{dx/ds} = \frac{xz}{yz} = \frac{x}{y} = \frac{x}{g_1(x)},$$

επομένως αναμένουμε ότι $y^2(x) = g_1^2(x) = C_1 + x^2$. Αντίστοιχα,

$$\frac{dg_2}{dx} = \frac{dz/ds}{dx/ds} = -\frac{2xy}{yz} = -2\frac{x}{z} = -2\frac{x}{g_2(x)},$$

επομένως αναμένουμε ότι $z^2(x) = g_2^2(x) = C_2 - 2x^2$. Πιο συγκεκριμένα,

$$(y^2(s) - x^2(s))' = 2yy' - 2xx' = 2y \cdot xz - 2x \cdot yz = 0 \Rightarrow y^2 = C_1 + x^2,$$

και επίσης

$$(z^2(s) + 2x^2(s))' = 2zz' + 4xx' = -2z \cdot 2xy + 4x \cdot yz = 0 \Rightarrow z^2 = C_2 - 2x^2.$$

Αφού $x, y, z > 0$ στο χωρίο που μελετάμε την εξίσωση, αναμένουμε ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι της μορφής $(x, \sqrt{C_1 + x^2}, \sqrt{C_2 - 2x^2})$, όπου C_1, C_2 σταθερές. Θέλουμε όμως να ισχύει ότι $\sqrt{C_1 + x^2} \leq \sqrt{C_2 - 2x^2}$ στο χωρίο αυτό, άρα

$$C_1 + x^2 \leq C_2 - 2x^2 \Rightarrow 3x^2 \leq C_2 - C_1 \Rightarrow C_2 \geq C_1,\ x \in \left(0, \sqrt{\frac{C_2 - C_1}{3}}\right].$$

Επομένως, οι καμπύλες πρέπει να είναι της μορφής

$$(x, \sqrt{C_1 + x^2}, \sqrt{C_2 - 2x^2}),\ \ x \in \left(0, \sqrt{\frac{C_2 - C_1}{3}}\right],$$

όπου C_1, C_2 είναι σταθερές.

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση u επί της προηγούμενης καμπύλης, θέτοντας

$$v(x) = u(x, \sqrt{C_1 + x^2}, \sqrt{C_2 - 2x^2}).$$

Τότε, αναμένουμε ότι

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv/ds}{dx/ds} = \frac{dz/ds}{dx/ds} = 0.$$

Πιο συγκεκριμένα, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} v'(x) = \partial_x u(x, \sqrt{C_1 + x^2}, \sqrt{C_2 - 2x^2}) + \frac{x}{\sqrt{C_1^2 + x^2}} \partial_y u(x, \sqrt{C_1 + x^2}, \sqrt{C_2 - 2x^2}) \\ - \frac{2x}{\sqrt{C_2 - 2x^2}} \partial_z u(x, \sqrt{C_1 + x^2}, \sqrt{C_2 - 2x^2}) = 0, \end{aligned}$$

οπότε η v είναι σταθερή στο $(0, \sqrt{(C_2 - C_1)/3}]$. Θέτοντας $x = \sqrt{(C_2 - C_1)/3}$, έχουμε τότε ότι

$$\begin{aligned} u(x, \sqrt{C_1 + x^2}, \sqrt{C_2 - 2x^2}) &= u\left(\sqrt{\frac{C_2 - C_1}{3}}, \sqrt{\frac{C_2 + 2C_1}{3}}, \sqrt{\frac{C_2 + 2C_1}{3}}\right) \\ &= f\left(\sqrt{\frac{C_2 - C_1}{3}}, \sqrt{\frac{C_2 + 2C_1}{3}}\right). \end{aligned}$$

Τέλος, θέτοντας $y = \sqrt{C_1 + x^2}$ και $z = \sqrt{C_2 - 2x^2}$, έχουμε ότι $C_1 = y^2 - x^2$ και $C_2 = z^2 + 2x^2$, οπότε η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι η

$$u(x, y, z) = f\left(\sqrt{x^2 + \frac{z^2 - y^2}{3}}, \sqrt{\frac{z^2 + 2y^2}{3}}\right).$$

2.3 Αλλαγή μεταβλητών

Ένας δεύτερος τρόπος επίλυσης μδε πρώτης τάξης είναι η αλλαγή μεταβλητών στην εξίσωση, ούτως ώστε ένας από τους συντελεστές των καινούριων μερικων παραγώγων να μηδενιστεί και να καταλήξουμε σε μία συνήθη διαφορική εξίσωση. Έτσι, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$a(x, y)\partial_x u + b(x, y)\partial_y u + c(x, y)u = d(x, y), \tag{2.13}$$

όπου το (x, y) ανήκει σε ένα χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Θα αλλάξουμε μεταβλητές στην εξίσωση, καταλήγοντας σε μία νέα συνάρτηση $\tilde{u}$ η οποία να ικανοποιεί μία απλούστερη εξίσωση. Έτσι, θεωρούμε έναν μετασχηματισμό $T : \Omega \to \Omega'$, όπου $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι ένα χωρίο, και γράφουμε $T(x, y) = (\xi(x, y), \eta(x, y))$, όπου οι συναρτήσεις $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$. Απαιτούμε επίσης τη συνθήκη

$$\begin{vmatrix} \partial_x \xi & \partial_y \xi \\ \partial_x \eta & \partial_y \eta \end{vmatrix} \neq 0,$$

η οποία μας εγγυάται ότι ο T είναι τοπικά αντιστρέψιμος. Έτσι, μπορούμε τοπικά να εκφράσουμε τα x, y συναρτήσει των $(\xi, \eta) \in U'$. Θέωρούμε τώρα τη συνάρτηση u ως προς τις μεταβλητές ξ, η, θέτοντας

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = u(T^{-1}(\xi, \eta)), \quad \tilde{u} : \Omega' \to \mathbb{R}\,.$$

Τότε,

$$u(x, y) = \tilde{u}(T(x, y)) = \tilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y)),$$

επομένως υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\partial_x u &= \partial_\xi \tilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))\partial_x \xi + \partial_\eta \tilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))\partial_x \eta, \\
\partial_y u &= \partial_\xi \tilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))\partial_y \xi + \partial_\eta \tilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))\partial_y \eta.
\end{aligned}$$

Έτσι, η εξίσωση (2.13) μετασχηματίζεται στην

$$(a\xi_x + b\xi_y)\tilde{u}_\xi + (a\eta_x + b\eta_y)\tilde{u}_\eta + c\tilde{u} = d.$$

Ο στόχος μας τώρα είναι να μηδενίσουμε έναν από τους συντελεστές των μερικών παραγώγων της $\tilde{u}$. Έστω ότι θέλουμε να μηδενίσουμε τον πρώτο συντελεστή, τότε ζητάμε $\alpha\xi_x + b\xi_y = 0$. Από τη μέθοδο των χαρακτηριστικών, αναμένουμε ότι ξ θα είναι σταθερή κατα μήκος των καμπυλών $y = y(x)$ με

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{\alpha(x, y)}.$$

Η γενική μορφή λύσης της προηγούμενης εξίσωσης μας οδηγεί σε μία εν γένει πεπλεγμένη μορφή $\xi_0(x, y) = c$, επομένως θεωρούμε τη συνάρτηση $\xi(x, y) = \xi_0(x, y)$. Τότε $\alpha\xi_x + b\xi_y = 0$, και η αρχική εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$(a\eta_x + b\eta_y)\tilde{u}_\eta + c\tilde{u} = d.$$

Η τελευταία εξίσωση περιέχει μόνο την μερική παράγωγο της $\tilde{u}$ ως προς η, οπότε αναμένουμε ότι μπορεί να επιλυθεί με μεθόδους συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Παράδειγμα 2.7. Στο πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση της μεταφοράς

$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u = 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

αναζητούμε συνάρτηση $x = x(t)$ τέτοια ώστε $x' = c$, όποτε $x(t) = ct + c'$, όπου c' σταθερά. Θέτοντας $\xi(x, t) = x - ct$ και επιλέγοντας $\eta(x, t) = t$, υπολογίζουμε

$$\begin{vmatrix} \partial_x \xi & \partial_t \xi \\ \partial_x \eta & \partial_t \eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $\tilde{u}(\xi, \eta) = u(T^{-1}(\xi, \eta))$, όπου $T(x, t) = (x - ct, t)$. Τότε έχουμε ότι $u(x, t) = \tilde{u}(x - ct, t)$, και υπολογίζουμε

$$\partial_x u = \partial_\xi \tilde{u}, \quad \partial_t u = -c\partial_\xi \tilde{u} + \partial_\eta \tilde{u},$$

άρα

$$0 = \partial_t u + c\partial_x u = \partial_\eta \tilde{u}.$$

Επομένως $\tilde{u}(\xi, \eta) = \tilde{u}(\xi)$ για κάποια συνάρτηση $\tilde{u}$. Άρα έχουμε ότι

$$u(x, t) = \tilde{u}(x - ct, t) = \tilde{u}(x - ct),$$

οπότε η u είναι συνάρτηση της $x - ct$, όπως και στο Παράδειγμα 2.2.

Παράδειγμα 2.8. Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$\begin{cases} x^3\partial_x u + 2\partial_y u = yu, & x > 0, y > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x > 0. \end{cases}$$

Αναζητούμε συνάρτηση $y = y(x)$ τέτοια ώστε $y' = \frac{2}{x^3}$, οπότε $y = -\frac{1}{x^2} + C$. Έτσι, θέτουμε $\xi(x,y) = y + \frac{1}{x^2}$, και επιλέγουμε τη συνάρτηση $\eta(x,y) = y$, ούτως ώστε

$$\begin{vmatrix} \partial_x\xi & \partial_y\xi \\ \partial_x\eta & \partial_y\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x^{-3} & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x^{-3} \neq 0.$$

Εκφράζοντας τα x, y συναρτήσει των ξ, η, έχουμε ότι $x = 1/\sqrt{\xi - \eta}$ και $y = \eta$, οπότε θέτουμε

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = u\left(\frac{1}{\sqrt{\xi-\eta}}, \eta\right).$$

Τότε, $u(x,y) = \tilde{u}(y + 1/x^2, y)$, και υπολογίζουμε

$$\partial_x u = -2x^{-3}\partial_\xi \tilde{u}, \quad \partial_y u = \partial_\xi \tilde{u} + \partial_\eta \tilde{u},$$

επομένως

$$\eta u = x^3\partial_x u + 2\partial_y u = -2\partial_\xi\tilde{u} + 2\partial_\xi\tilde{u} + 2\partial_\eta\tilde{u}.$$

Άρα η $\tilde{u}$ λύνει την εξίσωση $\partial_\eta\tilde{u} - \frac{\eta}{2}\tilde{u} = 0$. Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι ο $e^{-\int \eta/2} = e^{-\eta^2/4}$, οπότε

$$\partial_\eta\left(e^{-\eta^2/4}\tilde{u}\right) = 0 \Rightarrow \tilde{u}(\xi,\eta) = g(\xi)e^{\eta^2/4}.$$

Επομένως,

$$u(x,y) = \tilde{u}\left(y + \frac{1}{x^2}, y\right) = g\left(y + \frac{1}{x^2}\right)e^{y^2/4}.$$

Για να βρούμε την g, θέτουμε $y = 0$ στην προηγούμενη σχέση, και έχουμε ότι

$$f(x) = u(x,0) = g\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

επομένως $g(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, που συνεπάγεται ότι

$$u(x,y) = f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2y+1}}\right)e^{y^2/4}.$$

2.4 Προβλήματα

1. Για $a, b, c \in \mathbb{R}$, να βρεθούν όλες οι λύσεις της εξίσωσης

$$a\partial_x u + b\partial_y u + cu = 0$$

όπου $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

2. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών για τη μη γραμμική εξίσωση

$$\begin{cases} \partial_x u + \partial_y u = e^u, & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

3. Έστω $\Omega = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$, και θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y\partial_x u - x\partial_y u = 0, & (x,y) \in \Omega \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

που είναι παρόμοιο με το (2.10). Να αποδειχθεί ότι, αν $f \in C^1(\mathbb{R})$ και υπάρχει $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ που να λύνει αυτό το πρόβλημα, τότε η f είναι άρτια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Σε αυτή την περίπτωση, να υπολογιστεί η λύση του προβλήματος.

4. Έστω $\Omega = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$, και θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} x\partial_x u + y\partial_y u = 0, & (x,y) \in \Omega \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Αν το πρόβλημα αυτό έχει λύση, να εξεταστεί τι συνεπάγεται αυτό για την f. Σε αυτή την περίπτωση, να βρεθεί η λύση του προβλήματος.

5. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} 2xy\partial_x u + (y^2+1)\partial_y u = -2yu + xe^y, & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

6. Να αποδειχθεί ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} 2xy\partial_x u + (y^2+1)\partial_y u = -2yu + xe^y, & x > 0, y > 0 \\ u(0,y) = f(y), & y > 0. \end{cases}$$

δεν είναι καλώς τεθειμένο, βρίσκοντας μία συνάρτηση $f \in C^1(0,\infty)$ τέτοια ώστε να μην υπάρχει λύση στο πρόβλημα αυτό. (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τις χαρακτηριστικές καμπυλες του προηγούμενου προβλήματος).

7* Έστω $f \in C^1(\mathbb{R})$ και $g = g(x,y) : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής ως προς y και συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς x. Αν $c \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση στην (2.9), δηλαδή η

$$u(x,t) = f(x-ct) + \int_0^t g(x + c(r-t), r)\,dr$$

είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για την εξίσωση της μεταφοράς

$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u = g, & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

3 Αρμονικές συναρτήσεις

3.1 Εισαγωγή

Θα μελετήσουμε αρμονικές συναρτήσεις κυρίως σε υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και του $\mathbb{R}^3$, όπου θα χρειαστούμε και τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 3.1. i) Ένα σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται *χωρίο*, αν είναι ανοικτό και συνεκτικό.

ii) Ορίζουμε τους εξής χώρους:

$C(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u$ συνεχής στο $\Omega\}$

$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u\ k-$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\Omega\}$

$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega)$: ο χώρος των *λείων* συναρτήσεων.

Ορίζουμε επίσης τους ανάλογους χώρους για συναρτήσεις που επεκτείνονται στο σύνορο του Ω:

$C(\overline{\Omega}) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} :$ η u έχει συνεχή επέκταση στο $\overline{\Omega}\}$

$C^k(\overline{\Omega}) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \forall |\alpha| \leq k,$ η $D^\alpha u$ έχει συνεχή επέκταση στο $\overline{\Omega}\}$

$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\overline{\Omega})$.

iii) Ένα χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται C^1-ομαλό χωρίο, αν το σύνορό του τοπικά μπορεί να αναπαρασταθεί από το γράφημα μίας C^1 συναρτησης από το $\mathbb{R}^{n-1}$ στο $\mathbb{R}$. Τότε, σε κάθε σημείο $x' \in \partial\Omega$, ορίζεται το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\nu(x')$ ως το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια, στο σημείο x', με κατεύθυνση προς το $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

iv) Αν $u \in C^1(\overline{\Omega})$, η *κάθετη παράγωγος* της u στο $x' \in \partial\Omega$ είναι η κατά κατεύθυνση παράγωγος της u στο x', με κατεύθυνση $\nu(x')$, και συμβολίζεται ως $\partial_\nu u(x') = \nabla u(x') \cdot \nu(x')$.

v) Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό σύνολο, ένα (C^1) διανυσματικό πεδίο $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ είναι μία διανυσματική συνάρτηση $X = (f_1, f_2, \dots f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, όπου $f_i \in C^1(\Omega)$ για κάθε i. Η *απόκλιση* του X είναι η συνάρτηση

$$\operatorname{div} X = \partial_1 f_1 + \cdots + \partial_n f_n = \sum_{i=1}^n \partial_i f_i.$$

Αν $f, g \in C^1(\Omega)$ και X είναι ένα διανυσματικό πεδίο, υπενθυμίζουμε τους τύπους

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f, \quad \operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \nabla f \cdot X,$$

όπου το $\nabla f \cdot X$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των $\nabla f, X$.

Υπενθυμίζουμε επίσης το εξής θεώρημα από τον Απειροστικό Λογισμό.

Θεώρημα 3.2 (Θεώρημα απόκλισης)**.** *Αν το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι C^1-ομαλό χωρίο, και $X \in C^1(\overline{\Omega})$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο, τότε*

$$\int_\Omega \operatorname{div} X = \int_{\partial\Omega} X\nu \, d\sigma,$$

όπου σ είναι το επιφανειακό μέτρο στο $\partial\Omega$.

Αν $x \in \mathbb{R}^3$ και $r > 0$, συμβολίζουμε με $B_r(x)$ την μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r. Γράφουμε επίσης $B_r = B_r(0)$. Τότε, υπενθυμίζουμε τον εξής τύπο αλλαγής σε πολικές συντεταγμένες.

Πρόταση 3.3. *Έστω $B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n$, όπου $n = 2$ ή $n = 3$, και $u \in C(\overline{B_r(x)})$. Τότε,*

$$\int_{B_r(x)} u = \int_0^r \int_{\partial B_\rho(x)} u \, d\sigma_\rho d\rho = \int_0^r \int_{\partial B_1} \rho^{n-1} u(x_0 + \rho x') \, d\sigma(x') d\rho,$$

όπου $d\sigma_\rho$ είναι το επιφανειακό μέτρο στην $\partial B_\rho(x_0)$, και $d\sigma$ είναι το επιφανειακό μέτρο στην ∂B_1.

Επιλέγοντας συγκεκριμένα διανυσματικά πεδία στο Θεώρημα απόκλισης, οδηγούμαστε στους τύπους του Green.

Πρόταση 3.4. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ομαλό χωρίο, όπου $n = 2$ ή $n = 3$.*

1. *(πρώτος τύπος του Green) Αν $u \in C^2(\overline{\Omega})$ και $v \in C^1(\overline{\Omega})$, τότε $\int_\Omega v\Delta u = \int_{\partial\Omega} v\partial_\nu u \, d\sigma - \int_\Omega \nabla v \nabla u$.*

2. *(δεύτερος τύπος του Green) Αν $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, τότε $\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u = \int_{\partial\Omega} (u\partial_\nu v - v\partial_\nu u) \, d\sigma$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $n = 3$. Για τον πρώτο τύπο, παρατηρούμε ότι

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div}(\partial_1 u, \dots \partial_n u) = \sum_{i=1}^3 \partial_i(\partial_i u) = \sum_{i=1}^3 \partial_{ii} u = \Delta u.$$

Επομένως, αν $X = v\nabla u$, έχουμε ότι

$$\int_\Omega \operatorname{div} X = \int_\Omega \nabla v \nabla u + v \operatorname{div} \nabla u = \int_\Omega \nabla v \nabla u + v\Delta u,$$

και επίσης

$$\int_{\partial\Omega} X\nu \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} (v\nabla u)\nu \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} v\partial_\nu u \, d\sigma.$$

Τότε, ο πρώτος τύπος προκύπτει από το Θεώρημα Απόκλισης.

Για τον δεύτερο τύπο, εναλλάσσουμε τους ρόλους των u, v και αφαιρούμε κατά μέλη. □

Θέτοντας $v \equiv 1$ στον πρώτο τύπο του Green, παίρνουμε ως πόρισμα τη σχέση

$$\int_\Omega \Delta u = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \, d\sigma, \tag{3.1}$$

για κάθε $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, με $|\Omega|$ συμβολίζουμε τον "όγκο" του: αν $n = 2$ τότε το $|\Omega|$ είναι το εμβαδον του Ω, και αν $n = 3$, τότε αναφερόμαστε στον συνήθη όγκο. Επίσης, με $\sigma(\partial\Omega)$ συμβολίζουμε το μήκος του συνόρου του Ω (αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$), ή το εμβαδόν της επιφάνειας του συνόρου του Ω (αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$).

Λήμμα 3.5. *Αν $n = 2, 3$ και $B_r \subseteq \mathbb{R}^n$, τότε $\sigma(\partial B_r) = \frac{n}{r}|B_r|$.*

Απόδειξη. Υπολογίζοντας ότι $\operatorname{div} x = n$, από το θεώρημα απόκλισης έχουμε ότι

$$n|B_r| = \int_{B_r} n \, dx = \int_{B_r} \operatorname{div} x \, dx = \int_{\partial B_r} x'\nu \, d\sigma(x').$$

Όμως, το μοναδιαίο κάθετο στην ∂B_r είναι ίσο με x'/r, επομένως

$$n|B_r| = \int_{\partial B_r} x'\nu \, d\sigma(x') = r\int_{\partial B_r} |\nu|^2 \, d\sigma(x') = r\sigma(\partial B_r),$$

αφού $|\nu|^2 = 1$ στο ∂B_r. □

Λήμμα 3.6. *Ο όγκος της μπάλας με ακτίνα r στο $\mathbb{R}^3$ είναι ίσος με $\frac{4}{3}\pi r^3$.*

Απόδειξη.* Αλλάζοντας μεταβλητές, αρκεί να υπολογίσουμε τον όγκο της B_1. Υπενθυμίζουμε το βασικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Υπολογίζουμε

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{-|x|^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}\, dx = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx\right)^3 = \pi^{3/2},$$

και επίσης

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{-|x|^2}\, dx = \int_0^\infty \int_{S^2} \rho^2 e^{-\rho^2}\, dx' d\rho = |S^2| \int_0^\infty \rho^2 e^{-\rho^2} d\rho = 3|B_1| \int_0^\infty \rho^2 e^{-\rho^2} d\rho,$$

από το Λήμμα 3.5. Τέλος,

$$\int_0^\infty \rho^2 e^{-\rho^2} d\rho = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \rho \left(e^{-\rho^2}\right)' \, d\rho = -\left.\frac{1}{2}\rho e^{-\rho^2}\right|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty (\rho)' e^{-\rho^2}\, d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

που ολοκληρώνει τον υπολογισμό. □

3.2 Βασικές ιδιότητες αρμονικών συναρτήσεων

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα χωρίο, όπου $n = 2$ ή $n = 3$. Μία συνάρτηση $u \in C^2(\Omega)$ ονομάζεται *αρμονική*, εάν είναι λύση της εξίσωσης του Laplace

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial_{ii} u = 0.$$

Η γενικότερη εξίσωση $-\Delta u = f$ ονομάζεται *εξίσωση του Poisson*.

Μία σημαντική διαφοροποίηση σε σχέση με το όσα έχουμε δει έως τώρα είναι το ότι *η μέθοδος των χαρακτηριστικών αποτυγχάνει για τις αρμονικές συναρτήσεις*. Πράγματι, αν η $u : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μία αρμονική συνάρτηση σε ένα χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, θέτουμε $z(s) = u(x(s), y(s))$ για δύο συναρτήσεις x, y που θα οριστούν στη συνέχεια, και αναμένουμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση $\Delta u = 0$ προκειμένου να βρούμε την z.

Αφού η εξίσωση $\Delta u = 0$ εμπλέκει δύο μερικές παραγώγους της u, θα πρέπει να παραγωγίσουμε την z τουλάχιστον δύο φορές. Έτσι, υπολογίζουμε

$$z' = x'\partial_x u + y'\partial_y u,$$

οπότε

$$\begin{aligned} z'' &= x''\partial_x u + y''\partial_y u + (x')^2\partial_{xx}u + 2x'y'\partial_{xy}u + (y')^2\partial_{yy}u \\ &= x''\partial_x u + y''\partial_y u + 2x'y'\partial_{xy}u + \left((y')^2 - (x')^2\right)\partial_{yy}u, \end{aligned}$$

οπου χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση $\Delta u = 0$. Εν γένει, $\partial_{xy}u \not\equiv 0$ και $\partial_{yy}u \not\equiv 0$, οπότε για να απλοποιήθεί η εξίσωση αυτή πρέπει να απαιτήσουμε

$$x'y' = 0,\ (x')^2 = (y')^2,$$

που συνεπάγεται ότι $x' = y' = 0$, άρα οι x, y είναι σταθερές συναρτήσεις. Επομένως,

δεν υπάρχουν (πραγματικές) χαρακτηριστικές καμπύλες για την εξίσωση του Laplace.

Αν η u είναι αρμονική σε ένα χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ομαλό χωρίο με $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$, τότε από την (3.1),

$$\int_{\partial\Omega'} \partial_\nu u \, d\sigma = \int_{\Omega'} \Delta u = 0. \tag{3.2}$$

Αντίστροφα, αν το ολοκλήρωμα της κάθετης παραγώγου της u στο σύνορο κάθε ομαλού χωρίου Ω' με $\overline{\Omega}' \subseteq \Omega$ είναι ίσο με 0, τότε η u είναι αρμονική στο Ω. *(γιατί;)*

Η εξίσωση του Laplace εμφανίζεται με φυσιολογικό τρόπο ως ελαχιστοποιητής συναρτησοειδών.

Πρόταση 3.7. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ομαλό χωρίο, f συνεχής συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$, και $u \in C^2(\overline{\Omega})$ λύση της εξίσωσης του Poisson $-\Delta u = f$. Τότε, η u είναι ελαχιστοποιητής του τελεστή*

$$Tv = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v|^2 - fv$$

στην κλάση των συναρτήσεων $v \in C^2(\overline{\Omega})$ με $v = u$ στο $\partial\Omega$.

Απόδειξη. Έστω ότι η $u \in C^2(\overline{\Omega})$ είναι λύση της $-\Delta u = f$. Αν $v \in C^2(\overline{\Omega})$ με $u = v$ στο $\partial\Omega$, θέτοντας $w = u - v$ έχουμε ότι

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 - fu = \int_\Omega \nabla u \nabla w - fw + \int_\Omega \nabla u \nabla v - fv.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα, από το θεώρημα απόκλισης έχουμε ότι

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w - fw = \int_\Omega \operatorname{div}(w\nabla u) - w\Delta u - fw = \int_{\partial\Omega} w\partial_\nu u \, d\sigma + \int_\Omega w(-\Delta u - f) = 0,$$

αφού $w \equiv 0$ στο $\partial\Omega$, και $-\Delta u = f$ στο Ω. Επομένως,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 - fu = \int_\Omega \nabla u \nabla v - fv \leq \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| - \int_\Omega fv \leq \int_\Omega \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) - \int_\Omega fv,$$

και αναδιατάσσοντας τους όρους προκύπτει ότι $Tu \leq Tv$. □

Παρατήρηση 3.8*. Με τις υποθέσεις της Πρότασης 3.7, ο ελαχιστοποιητής του T είναι μοναδικός (*γιατί;*). Επιπλέον, βλέπουμε ότι στον ορισμό του τελεστή T εμφανίζεται ο όρος $\int_\Omega |\nabla u|^2$, ο οποίος είναι πεπερασμένος όταν $\nabla u \in L^2(\Omega)$. Έτσι, στο πλαίσιο της σύνδεσης ελαχιστοποιητών με λύσεις μερικών διαφορικών εξισώσεων, ο όρος αυτός προοιμιάζει τον ορισμό μίας κλάσης συναρτήσεων η οποία είναι μεγαλύτερη από τον $C^2(\overline{\Omega})$ και είναι ο κατάλληλος χώρος για τη μελέτη πολλών προβλημάτων στις μερικές διαφορικές εξισώσεις. Η κλάση αυτή είναι ο *χώρος Sobolev*

$$W^{1,2}(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Μία από τις πιο σημαντικές ιδιότητες αρμονικών συναρτήσεων είναι οι *τύποι μέσης τιμής*. Για να τους αποδείξουμε, δείχνουμε πρώτα το εξής λήμμα.

Λήμμα 3.9. *Έστω $u \in C^1(\Omega)$, και έστω $x \in \Omega, r > 0$ τέτοια ώστε $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$. Αν*

$$f(s) = \frac{1}{\sigma(\partial B_s)} \int_{\partial B_s(x)} u(y')\, d\sigma(y')$$

για $s \in (0, r)$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, r)$, και για $s \in (0, r)$,

$$f'(s) = \frac{1}{\sigma(\partial B_s)} \int_{\partial B_s(x)} \partial_\nu u(y')\, d\sigma(y'). \tag{3.3}$$

Απόδειξη. Για $y' \in B_s(x)$, θέτουμε $z' = \frac{y'-x}{s}$, και τότε $z' \in \partial B_1$. Η τοπική παραμόρφωση είναι ίση με $d\sigma(y') = s^{n-1} d\sigma(z')$, επομένως

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma(\partial B_s)} \int_{\partial B_s(x)} u(y')\, d\sigma(y') &= \frac{1}{\sigma(\partial B_1)s^{n-1}} \int_{\partial B_1} u(x+sz')s^{n-1}\, d\sigma(z') \\ &= \frac{1}{\sigma(\partial B_1)} \int_{\partial B_1} u(x+sz')\, d\sigma(z').\end{aligned}$$

Έστω $s \in (0, r)$. Σταθεροποιούμε $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε $s < r - \varepsilon_0$. Έστω $h \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $s - h, s + h \in (0, r - \varepsilon_0)$. Τότε,

$$\frac{f(s+h) - f(s)}{h} = \frac{1}{\sigma(\partial B_1)} \int_{\partial B_1} \frac{u(x+(s+h)z') - u(x+sz')}{h}\, d\sigma(z').$$

Έστω $v(t) = u(x + tz')$ για $z' \in \partial B_1$ σταθερό, τότε $v'(t) = \nabla u(x + tz') \cdot z'$ για $t \in (0, r)$. Επομένως, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, για κάθε s, h με $s - h, s + h \in (0, r)$, έχουμε ότι υπάρχει s_h μεταξύ των $s, s + h$ τέτοιο ώστε

$$\frac{u(x+(s+h)z') - u(x+sz')}{h} = \nabla u(s_h z') \cdot z'.$$

Επομένως,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(s+h) - f(s)}{h} = \frac{1}{\sigma(\partial B_1)} \int_{\partial B_1} \nabla u(x+sz') \cdot z'\, d\sigma(z'),$$

(*γιατί;*) και αλλάζοντας ξανά μεταβλητές έχουμε ότι

$$f'(s) = \frac{1}{\sigma(\partial B_1)s^{n-1}} \int_{\partial B_1} \nabla u(x+sz') \cdot \frac{sz'}{s} s^{n-1}\, d\sigma(z') = \frac{1}{\sigma(\partial B_s)} \int_{\partial B_s(x)} \nabla u(y') \cdot \frac{y-x'}{s}\, d\sigma(y').$$

Όμως, το μοναδιαίο κάθετο στην $\partial B_s(x)$ στο $y' \in \partial B_s(x)$ είναι το $(y' - x)/s$, και έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση 3.10. *Έστω u αρμονική συνάρτηση στο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, όπου $n = 2$ ή $n = 3$. Τότε η u ικανοποιεί την ιδιότητα της μέσης τιμής: για κάθε $x \in \Omega$ και $r > 0$ τέτοιο ώστε $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$, έχουμε ότι*

$$u(x) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} u = \frac{1}{\sigma(B_r)} \int_{\partial B_r(x)} u\, d\sigma.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \Omega$ και $r > 0$ τέτοιο ώστε $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B_s(x) \subseteq \Omega$ για κάθε $s \in (0, r+\varepsilon) := I$. Για $s \in I$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(s) = \frac{1}{\sigma(\partial B_s(x))} \int_{\partial B_s(x)} u(y')\, d\sigma(y')$$

όπως στο Λημμα 3.9. Αφού η u είναι αρμονική στο Ω, οι σχέσεις (3.3) και (3.1) μας δείχνουν ότι

$$f'(s) = \frac{1}{\sigma(\partial B_s(x))} \int_{\partial B_s(x)} \partial_\nu u(y')\, d\sigma(y') = \frac{1}{\sigma(\partial B_s(x))} \int_{B_s(x)} \Delta u(y)\, dy = 0,$$

για κάθε s. Άρα η f είναι σταθερή στο I. Όμως, το όριο της f όταν το $s \to 0^+$ είναι ίσο με $u(x)$ (*γιατί;*), οπότε $f(s) = u(x)$ στο I.

Για την άλλη ισότητα, από τον τύπο ολοκλήρωσης σε πολικές συντεταγμένες και τον ορισμό της f έχουμε ότι

$$\int_{B_s(x)} u = \int_0^s \int_{\partial B_t(x)} u\, d\sigma_t\, dt = \int_0^s \sigma(\partial B_t(x)) f(t)\, dt = u(x) \int_0^s \sigma(\partial B_t(x))\, dt,$$

και ξανά από τον τύπο ολοκλήρωσης σε πολικές συντεταγμένες,

$$\int_0^s \sigma(\partial B_t(x))\, dt = \int_0^s \int_{\partial B_t(x)} d\sigma_t dt = \int_{B_s} dx = |B_s|,$$

που αποδεικνύει την πρώτη ισότητα. □

Η ιδιότητα της μέσης τιμής χαρακτηρίζει τις αρμονικές συναρτήσεις. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 3.11. *Έστω $u \in C^2(\Omega)$. Αν για κάθε $x \in \Omega$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$ ισχύει ότι*

$$u(x) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r)} \int_{\partial B_r(x)} u\, d\sigma,$$

τότε η u είναι αρμονική στο Ω.

Απόδειξη. Έστω ότι η u δεν είναι αρμονική στο Ω, τότε υπάρχει $x \in \Omega$ τέτοιο ώστε $\Delta u(x) \neq 0$. Αν $\Delta u(x) < 0$, θεωρώντας την $-u$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\Delta u(x) > 0$, οπότε υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $\Delta u(z) > 0$ στην $B_r(x)$. Θεωρώντας την f του Λήμματος 3.9, οι (3.3) και (3.1) για $s \in (0, r)$ μας δείχνουν ότι

$$f'(s) = \frac{1}{\sigma(\partial B_s(x))} \int_{\partial B_s(x)} \partial_\nu u(y')\, d\sigma(y') = \frac{1}{\sigma(\partial B_s(x))} \int_{B_s(x)} \Delta u(y)\, dy > 0.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, επειδή από την υπόθεση, η f είναι σταθερή. □

Ομοίως έχουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.12. *Έστω $u \in C^2(\Omega)$. Αν για κάθε $x \in \Omega$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$ ισχύει ότι*

$$u(x) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} u,$$

τότε η u είναι αρμονική στο Ω.

Απόδειξη. Από τον τύπο ολοκλήρωσης σε πολικές συντεταγμένες, έχουμε ότι, για κάθε $x \in \Omega$ και r με $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$,

$$\frac{1}{r^n|B_1|}\int_0^r \int_{\partial B_t(x)} u\, d\sigma_t\, dt = \frac{1}{r^n|B_1|}\int_{B_r(x)} u.$$

Η τελευταία συνάρτηση είναι σταθερή ως προς r, επομένως, παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη ως προς r, έχουμε ότι

$$-\frac{n}{r^{n+1}|B_1|}\int_0^r \int_{\partial B_t(x)} u\, d\sigma_t\, dt + \frac{1}{r^n|B_1|}\int_{\partial B_r(x)} u\, d\sigma_r = 0,$$

επομένως

$$\frac{1}{nr^{n-1}|B_1|}\int_{\partial B_r(x)} u\, d\sigma_r = \frac{1}{r^n|B_1|}\int_0^r \int_{\partial B_t(x)} u\, d\sigma_t\, dt = \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} u = u(x),$$

από τον τύπο ολοκλήρωσης σε πολικές συντεταγμένες, και τη δοθείσα σχέση. Αφού $nr^{n-1}|B_1| = \sigma(\partial B_r)$, η προηγούμενη σχέση δείχνει ότι

$$u(x) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r)}\int_{\partial B_r(x)} u\, d\sigma,$$

για κάθε r με $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$. Άρα το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 3.11. □

Παρατήρηση 3.13. Για να οριστεί η μέση τιμή της u, αρκεί η u να είναι μία τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση, ή για παράδειγμα συνεχής. Τότε ισχύει το εξής ισχυρότερο αποτέλεσμα: αν η $u \in C(\Omega)$ ικανοποιεί την ιδιότητα μέσης τιμής, τότε $u \in C^2(\Omega)$ και η u είναι αρμονική στο Ω (*γιατί;*).

Πολλές από τις ιδιότητες που μελετούμε ισχύουν και για συναρτήσεις οι οποίες δεν ικανοποιούν ακριβώς την ισότητα $\Delta u = 0$, αλλά τις ανισότητες $-\Delta u \leq 0$ ή $-\Delta u \geq 0$.

Ορισμός 3.14. Έστω $u \in C^2(\Omega)$. Η u ονομάζεται *υφαρμονική*, αν $-\Delta u \leq 0$ στο Ω. Η u ονομάζεται *υπεραρμονική*, αν $-\Delta u \geq 0$ στο Ω.

Τότε, αν η u είναι υφαρμονική, ισχύει ότι

$$u(x) \leq \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} u, \quad u(x) \leq \frac{1}{\sigma(\partial B_r)}\int_{\partial B_r(x)} u, \tag{3.4}$$

για κάθε μπάλα $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$. Ομοίως, αν η u είναι υπεραρμονική, ισχύει ότι

$$u(x) \geq \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} u, \quad u(x) \geq \frac{1}{\sigma(\partial B_r)}\int_{\partial B_r(x)} u, \tag{3.5}$$

για κάθε μπάλα $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$ (*γιατι;*).

Οι υφαρμονικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ είναι ακριβώς οι κυρτές συναρτήσεις, οι οποίες λαμβάνουν το μέγιστό τους στα άκρα του πεδίου ορισμού τους. Γενικεύοντας σε περισσότερες διαστάσεις, χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες παραλλαγές του τύπου μέσης τιμής για υφαρμονικές συναρτήσεις, οδηγούμαστε στην αρχή μεγίστου.

Πρόταση 3.15. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο χωρίο, και $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ μία υφαρμονική συνάρτηση.*

i) Τότε, ισχύει η αρχή μεγίστου:

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

ii) Επιπλέον, ισχύει η ισχυρή αρχή μεγίστου: αν υπάρχει $x \in \Omega$ τέτοιο ώστε $u(x) = \max_{\overline{\Omega}} u$, τότε η u είναι σταθερή στο $\overline{\Omega}$.

Απόδειξη. Θέτουμε $\max_{\overline{\Omega}} u = M$, και έστω ότι υπάρχει $x \in \Omega$ τέτοιο ώστε $u(x) = M$. Το Ω είναι ανοικτό, επομένως υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $B_r(x) \subseteq \Omega$. Αν $u(y) < M$ για κάποιο $y \in B_r(x)$, τότε λόγω συνέχειας υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $u(z) \leq M - \varepsilon$ για κάθε z σε μία μικρή μπάλα $B_\delta(y) \subseteq B_r(x)$. Τότε, από την (3.4),

$$\begin{aligned} M = u(x_0) &= \frac{1}{|B_r(x)|}\left(\int_{B_r(x)\setminus B_\delta(y)} u + \int_{B_\delta(y)} u\right) \\ &\leq \frac{1}{|B_r(x)|}\left(\int_{B_r(x)\setminus B_\delta(y)} M + \int_{B_\delta(y)} M - \varepsilon\right) = M - \frac{\varepsilon\,|B_\delta(y)|}{|B_r(x)|}, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα $u \equiv M$ στην $B_r(x)$, επομένως το σύνολο $\{u = M\}$ είναι ανοιχτό στο Ω. Όμως, λόγω συνέχειας, το $\{u = M\}$ είναι σχετικά κλειστό στο Ω. Από την συνεκτικότητα του Ω, έχουμε οτι $\{u = M\} = \varnothing$ ή $\{u = M\} = \Omega$. Όμως, αφού υπάρχει $x \in \Omega$ στο οποίο η u είναι ίση με M, το $\{u = M\}$ είναι μη κενό, επομένως $\{u = M\} = \Omega$ και η u είναι σταθερή στο Ω. □

Αντικαθιστώντας τη u με τη $-u$, οδηγούμαστε στην αρχή ελαχίστου για υπεραρμονικές συναρτήσεις.

Πόρισμα 3.16. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα χωρίο, και $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ μία υπεραρμονική συνάρτηση.*

i) Τότε, ισχύει η αρχή ελαχίστου:

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

ii) Επιπλέον, ισχύει η ισχυρή αρχή ελαχίστου: αν υπάρχει $x \in \Omega$ τέτοιο ώστε $u(x) = \min_{\overline{\Omega}} u$, τότε η u είναι σταθερή στο $\overline{\Omega}$.

Αν η u είναι αρμονική, τότε είναι υφαρμονική και υπεραρμονική, επομένως ισχύει και η αρχή μεγίστου, και η αρχή ελαχίστου. Συνδυάζοντας αυτά τα δύο αποτελέσματα, οδηγούμαστε στην πολύ σημαντική ιδιότητα μοναδικότητας λύσεων προβλημάτων συνοριακών τιμών.

Θεώρημα 3.17. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα χωρίο, $f \in C(\Omega)$ και $g \in C(\partial\Omega)$. Τότε, το πρόβλημα συνοριακών τιμών*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \textit{στο } \Omega \\ \quad u = g, & \textit{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

έχει το πολύ μία λύση $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Απόδειξη. Έστω $u, \tilde{u}$ δύο λύσεις του προβλήματος. Αν $v = u - \tilde{u}$, τότε $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, και η v είναι λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta v = 0, & \text{στο } \Omega \\ \quad v = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Αφού η v είναι αρμονική, ισχύει η αρχή μεγίστου και η αρχή ελαχίστου. Όμως, το μέγιστο και το ελάχιστο της v στο $\partial\Omega$ είναι ίσα με 0, άρα $v \equiv 0$ στο Ω. Επομένως $u \equiv \tilde{u}$ στο Ω. □

3.3 Εξομαλυντές και λειότητα αρμονικών συναρτήσεων

Όπως ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy στη μιγαδική ανάλυση δείχνει ότι οι παραγωγίσιμες μιγαδικές συναρτήσεις είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες και συνεπάγεται φράγματα για τις παραγώγους, έτσι και η ιδιότητα μέσης τιμής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει ανάλογα αποτελέσματα για αρμονικές συναρτήσεις. Ο παραλληλισμός δεν είναι τυχαίος, καθώς τα πραγματικά και φανταστικά μέρη μιγαδικών συναρτήσεων είναι αρμονικές συναρτήσεις, σε υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$.

Έτσι, θα δείξουμε το εξής:

$$\text{αν } u \in C^2(\Omega) \text{ με } \Delta u = 0, \text{ τότε } u \in C^\infty(\Omega).$$

Θα μελετήσουμε πρώτα έναν πολύ χρήσιμο τρόπο προσέγγισης συναρτήσεων από C^∞ συναρτήσεις, μέσω της μεθόδου της *εξομάλυνσης* (mollification). Χρειαζόμαστε αρχικά μία μη αρνητική συνάρτηση $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ με φορέα στην μοναδιαία μπάλα (δηλαδή, $\phi(x) = 0$ αν $|x| > 1$) και $\int_{B_1} \phi = 1$.

Ορισμός 3.18. Ο *τυπικός εξομαλυντής (mollifier)* $\phi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ είναι η συνάρτηση

$$\phi(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

όπου η σταθερά $C > 0$ είναι τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$.

Μπορούμε να δείξουμε τότε ότι $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, με $\phi(x) = 0$ για κάθε x με $|x| \geq 1$ (*γιατί;*).

Αν $\varepsilon > 0$, ορίζουμε

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Τότε, η ϕ_ε έχει φορέα στην μπάλα B_ε, και $\int_{B_\varepsilon} \phi_\varepsilon = 1$.

Η διαδικασία η οποία δημουργεί λείες συναρτήσεις οι οποίες προσεγγίζουν μία οποιαδήποτε συνάρτηση f είναι η εξομάλυνση της f, η οποία ορίζεται ως η συνέλιξη της f με τον τυπικό εξομαλυντή, αλλάζοντας σταδιακά την κλίμακα ε.

Ορισμός 3.19. Έστω Ω ένα χωρίο, και $f \in L^1(\Omega)$ (ή $f \in C(\Omega)$). Η εξομάλυνση της f είναι η συνάρτηση

$$f_\varepsilon(x) = (f * \phi_\varepsilon)(x) = \int_\Omega f(y)\phi_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{B_\varepsilon} f(x-y)\phi_\varepsilon(y)\,dy,$$

για $x \in \Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.

Ο λόγος για τον οποίο η f_ε ορίζεται μόνο μέσα στο Ω_ε είναι επειδή η f ορίζεται μέσα στο Ω, οπότε για το τελευταίο ολοκλήρωμα θα πρέπει $x - y \in \Omega$ για κάθε $y \in B_\varepsilon$.

Θεώρημα 3.20. *Έστω $f \in L^1(\Omega)$, τότε $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Επίσης, αν η f είναι συνεχής στο $x \in \Omega$, τότε $f_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f(x)$.*

Απόδειξη.* Έστω $\varepsilon > 0$, $i \in \{1, \dots n\}$ και $x \in \Omega_\varepsilon$. Το Ω_ε είναι ανοικτό, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $x + he_i \in \Omega_\varepsilon$ για κάθε $|h| < \delta$. Τότε, υπολογίζουμε

$$\frac{f_\varepsilon(x+he_i) - f_\varepsilon(x)}{h} = \int_\Omega \frac{1}{h}\left(\phi_\varepsilon(x+he_i-y) - \phi_\varepsilon(x-y)\right)f(y)\,dy.$$

Για δοσμένα x, y, ε, θέτουμε $g(t) = \phi_\varepsilon(x + te_i - y)$. Τότε, από το θεώρημα μέσης τιμής,

$$\frac{1}{h}\left(\phi_\varepsilon(x + he_i - y) - \phi_\varepsilon(x - y)\right) = \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(h'),$$

για κάποιο h' μεταξύ των $0, h$. Επίσης, $g'(t) = \partial_i \phi_\varepsilon(x + te_i - y)$, επομένως, ξανά από το θεώρημα μέσης τιμής,

$$\frac{1}{h}\left(\phi_\varepsilon(x + he_i - y) - \phi_\varepsilon(x - y)\right) - \partial_i \phi_\varepsilon(x - y) = g'(h') - g'(0) = h' g''(h''),$$

για κάποιο h'' μεταξύ του 0 και του h'. Αφού η g'' είναι φραγμένη από κάποιο $M_\varepsilon > 0$, θα έχουμε ότι, για κάθε x, y,

$$\left|\frac{1}{h}\left(\phi_\varepsilon(x + he_i - y) - \phi_\varepsilon(x - y)\right) - \partial_i \phi_\varepsilon(x - y)\right| \leq M_\varepsilon |h|,$$

άρα

$$\begin{aligned}\frac{f_\varepsilon(x + he_i) - f_\varepsilon(x)}{h} - \int_\Omega \partial_i \phi_\varepsilon(x - y) f(y)\, dy & \\ = \int_\Omega \left(\frac{1}{h}\left(\phi_\varepsilon(x + he_i - y) - \phi_\varepsilon(x - y)\right) - \partial_i \phi_\varepsilon(x - y)\right) f(y)\, dy.\end{aligned}$$

Θεωρώντας την απόλυτη τιμή, ο τελευταίος όρος φράσσεται από πάνω από

$$\int_\Omega M_\varepsilon |h| |f(y)|\, dy \xrightarrow[h \to 0]{} 0,$$

επομένως

$$\partial_i f_\varepsilon(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f_\varepsilon(x + he_i) - f_\varepsilon(x)}{h} = \int_\Omega \partial_i \phi_\varepsilon(x - y) f(y)\, dy.$$

Με παρόμοιο τρόπο, έχουμε ότι

$$D^\alpha f_\varepsilon(x) = \int_\Omega D^\alpha \phi_\varepsilon(x - y) f(y)\, dy$$

για κάθε πολυδείκτη α. Επομένως, $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

Το δεύτερο μέρος αφήνεται ως άσκηση. □

Χρησιμοποιώντας τη διαδικασία της εξομάλυνσης, μπορούμε να δείξουμε ότι οι αρμονικές συναρτήσεις είναι λείες.

Θεώρημα 3.21. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα χωρίο, και $u \in C^2(\Omega)$ μία αρμονική συνάρτηση στο Ω. Τότε $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι η u είναι C^∞ στο Ω_ε, τότε η u θα ανήκει στον $C^\infty(\Omega)$. Θέτουμε $\phi_0 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, με

$$\phi_0(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{x^2 - 1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

και υπολογίζουμε

$$
\begin{aligned}
u_\varepsilon(x) &= \int_\Omega \phi_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B_\varepsilon(x)} \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B_\varepsilon(x)} \phi_0\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)u(y)\,dy = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon\int_{\partial B_t(x)} \phi_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)u(y')\,d\sigma_t(y')dt \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \phi_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\left(\int_{\partial B_t(x)} u(y')\,dy'\right)dt = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \phi_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sigma(\partial B_t(x))u(x)\,dt,
\end{aligned}
$$

από τον τύπο αλλαγής σε πολικές συντεταγμένες, και τον τύπο μέσης τιμής. Επομένως,

$$
\begin{aligned}
u_\varepsilon(x) &= \frac{u(x)}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \phi_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sigma(\partial B_t(x))\,dt = \frac{u(x)}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon\int_{\partial B_t(x)} \phi_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\,d\sigma_t(y')dt \\
&= \frac{u(x)}{\varepsilon^n}\int_{B_\varepsilon(x)} \phi_0\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)dy = u(x),
\end{aligned}
$$

μετά από την αλλαγή μεταβλητής $x-y=\varepsilon\, z$. Άρα $u_\varepsilon(x)=u(x)$ για $x\in\Omega_\varepsilon$. Αφού $u_\varepsilon\in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ από το Θεώρημα 3.20, έχουμε ότι $u\in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. □

Έχοντας αποδείξει ότι οι αρμονικές συναρτήσεις είναι λείες στο πεδίο ορισμού τους, μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε παράγωγό τους. Τότε, οδηγούμαστε στην εξής εκτίμηση για τις παραγώγους αρμονικών συναρτήσεων.

Πρόταση 3.22. *Έστω $x\in\mathbb{R}^n$, $r>0$, και $u: B_r(x)\to\mathbb{R}$ μία αρμονική συνάρτηση. Τότε,*

$$
|\partial_i u(x)| \le \frac{C_n}{r^{n+1}}\|u\|_{L^1(B_r(x))},
$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το n.

Παρατήρηση 3.23*. Επαγωγικά, η προηγούμενη εκτίμηση γενικεύεται για κάθε τάξης παράγωγο αρμονικών συναρτήσεων. Σε συνδυασμό με το θεώρημα του Taylor, μπορούμε να δείξουμε ότι οι αρμονικές συναρτήσεις όχι μόνο είναι λείες στο πεδίο ορισμού τους, αλλά είναι *αναλυτικές*, δηλαδή γράφονται ως δυναμοσειρά σε μία μπάλα με κέντρο κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους, για αρκετά μικρή ακτίνα.

Προτού δείξουμε την προηγούμενη εκτίμηση, θα την χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε το Θεώρημα του Liouville.

Θεώρημα 3.24 (Liouville)**.** *Έστω $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ αρμονική και φραγμένη. Τότε η u είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Έστω $x\in\mathbb{R}^n$. Υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $|u|\le M$ στο $\mathbb{R}^n$. Αν $r>0$, η u είναι αρμονική στην $B_r(x)$, επομένως, από την Πρόταση 3.22 έχουμε ότι, για κάθε $i\in\{1,\dots n\}$,

$$
|\partial_i(x)| \le \frac{C_n}{r^{n+1}}\int_{B_r(x)}|u| \le \frac{C_n}{r^{n+1}}M|B_r| = \frac{C_n M|B_1|}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0.
$$

Επομένως $\nabla u\equiv 0$ στο $\mathbb{R}^n$, άρα η u είναι σταθερή. □

Απόδειξη. (της Πρότασης 3.22): Έστω $i \in \{1, \dots n\}$. Από το Θεώρημα 3.21, $u \in C^\infty(B_r)$, επομένως $\partial_i u \in C^2(\Omega)$. Τότε, παραγωγίζοντας την $\Delta u = 0$ ως προς x_i, έχουμε ότι η $\partial_i u$ είναι αρμονική στην B_r. Επομένως, από τον τύπο μέσης τιμής και το Θεώρημα Απόκλισης,

$$|\partial_i u(x)| = \frac{1}{|B_{r/2}|}\left|\int_{B_{r/2}(x)} \partial_i u\right| = \frac{1}{|B_{r/2}|}\left|\int_{\partial B_{r/2}(x)} u \cdot \nu_i \, d\sigma\right| \leq \frac{1}{|B_{r/2}|}\int_{\partial B_{r/2}(x)} |u| \, d\sigma.$$

Έστω τώρα $y \in \partial B_{r/2}(x)$, τότε $\overline{B_{r/4}(y)} \subseteq B_r(x)$, αφού εάν $|z-y| \leq r/4$, τότε $|z-x| \leq |z-y|+|y-x| < r/4 + r/2 < r$. Επομένως η u είναι αρμονική στην $B_{r/4}(y)$, και από τον τύπο μέσης τιμής,

$$|u(y)| = \left|\frac{1}{|B_{r/4}|}\int_{B_{r/4}(y)} u\right| \leq \frac{1}{|B_{r/4}|}\int_{B_{r/4}(y)} |u| \leq \frac{1}{|B_{r/4}|}\int_{B_r(x)} |u|,$$

άρα

$$|\partial_i u(x)| \leq \frac{1}{|B_{r/2}|}\int_{\partial B_{r/2}(x)} |u| \, d\sigma \leq \frac{\sigma(B_{r/2})}{|B_{r/2}|}\frac{1}{|B_{r/4}|}\int_{B_r(x)} |u| = \frac{C_n}{r^{n+1}}\|u\|_{L^1(B_r(x))}.$$

□

3.4 Η θεμελιώδης λύση

Για τα επόμενα, θα χρειαστούμε τον χώρο των λείων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα, ο οποίος ορίζεται ως

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \exists R > 0, f(x) = 0 \ \forall |x| \geq R\}.$$

Το Dirac δέλτα $\delta_y : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ είναι ο τελεστής που στέλνει κάθε συνάρτηση $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ στην τιμή της στο y, δηλαδή

$$\delta_y(\phi) = \phi(y).$$

Άτυπα, τότε γράφουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta_y \phi = \phi(y).$$

Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης του Laplace είναι μία λύση της εξίσωσης $-\Delta\Gamma = \delta_0$ στο $\mathbb{R}^n$, όπου δ_0 είναι η Dirac δέλτα κατανομή στο 0. Τότε, αν $y \in \mathbb{R}^n$, περιμένουμε ότι η λύση της εξίσωσης $-\Delta\Gamma_y = \delta_y$ δίνεται από τον τύπο $\Gamma_y(x) = \Gamma(x-y)$, λόγω του ότι ο τελεστής Laplace μετατίθεται με μεταφορές (*γιατί;*).

Για έναν πιο συγκεκριμένο ορισμό, από τον πρώτο τύπο του Green (Πρόταση 3.4), θα πρέπει να έχουμε ότι

$$\int_{B_M} \delta_0 \phi = -\int_{B_M} \Delta\Gamma \cdot \phi = \int_{B_M} \nabla\Gamma\nabla\phi - \int_{\partial B_M} \partial_\nu \Gamma \cdot \phi,$$

για κάθε $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ και κάθε $M > 0$. Αφού η $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, υπάρχει $R > 0$ τέτοιο ώστε $\phi(x) = 0$ αν $|x| \geq R$, άρα, για $M > R$,

$$\phi(0) = \int_{B_M} \delta_0 \phi = -\int_{B_M} \Delta\Gamma \cdot \phi = \int_{B_M} \nabla\Gamma\nabla\phi - \int_{\partial B_M} \partial_\nu \Gamma \cdot \phi = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\Gamma\nabla\phi,$$

επομένως, ορίζουμε την *θεμελιώδη λύση* ως μία συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla\Gamma\nabla\phi = \phi(0),$$

για κάθε $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Η χρησιμότητα της θεμελιώδους λύσης έγκειται στο γεγονός ότι "κωδικοποιεί" όλες τις λύσεις της εξίσωσης του Poisson στο $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, έστω $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, και έστω ότι η u λύνει την εξίσωση $-\Delta u = f$. Αν $f(x) = 0$ για $|x| > R$, τότε, από τον δεύτερο τύπο του Green (Πρόταση 3.4), θα πρέπει να έχουμε ότι

$$\int_{B_R} (\Gamma_y \Delta u + u\delta_y) = \int_{B_R} (\Gamma_y \Delta u - u\Delta \Gamma_y) = \int_{\partial B_R} (u\partial_\nu \Gamma_y - \Gamma_y \partial_\nu u)\, d\sigma_R.$$

Αν οι Γ_y, $\nabla \Gamma_y$ συγκλίνουν στο 0 με "καλό" τρόπο όταν το $x \to \infty$, παίρνοντας το όριο όταν $R \to \infty$, θα πρέπει να έχουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\delta_y = -\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_y \Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_y f,$$

επομένως

$$u(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z-y) f(z)\, dz. \tag{3.6}$$

Για να δώσουμε σαφές νόημα στα προηγούμενα, θα βρούμε την θεμελιώδη λύση: αρχικά, λόγω του σφαιρικού αναλλοίωτου του τελεστή Laplace, ψάχνουμε για μία λύση της εξίσωσης $-\Delta\Gamma = \delta_0$ με $\Gamma(x) = \Gamma(r)$, όπου $r = |x|$. Τότε, $-\Delta\Gamma = 0$ στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Περιμένοντας ότι η Γ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, υπολογίζουμε

$$\partial_i \Gamma(x) = \Gamma'(r)\partial_i r = \Gamma'(r)\frac{x_i}{r},$$

και επίσης

$$\partial_{ii}\Gamma(x) = \partial_i(\Gamma'(r))\frac{x_i}{r} + \Gamma'(r)\partial_i\left(\frac{x_i}{r}\right) = \Gamma''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \Gamma'(r)\frac{r - x_i\frac{x_i}{r}}{r^2} = \Gamma''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \Gamma'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right).$$

Επομένως, έχουμε την έκφραση της Λαπλασιανής σε πολικές συντεταγμένες, για $x \neq 0$,

$$\Delta\Gamma(x) = \sum_{i=1}^n \partial_{ii}\Gamma(x) = \Gamma''(r)\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{r^2} + \Gamma'(r)\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) = \Gamma''(r) + \frac{n-1}{r}\Gamma'(r).$$

Παράδειγμα 3.25. Ο προηγούμενος υπολογισμός εφαρμοζεται σε οποιαδήποτε συνάρτηση της μορφής $u(x) = \tilde{u}(|x|)$, όταν η $\tilde{u} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Για παράδειγμα, αν $u(x) = |x|^2$, τότε $\tilde{u}(\rho) = r^2$, επομένως

$$\Delta u(x) = \tilde{u}''(r) + \frac{n-1}{r}\tilde{u}'(r) = 2 + \frac{n-1}{r}2r = 2n.$$

Επιστρέφοντας στη Γ, και θεωρώντας ότι $\Delta\Gamma = 0$ στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, θα πρέπει να έχουμε ότι

$$\Gamma''(r) + \frac{n-1}{r}\Gamma'(r) = 0,$$

για $r > 0$, επομένως η $r^{n-1}\Gamma'(r)$ είναι ίση με μία σταθερά C. Αν $n = 2$, τότε η γενική λύση είναι η $\Gamma(r) = C\log r + C'$, ενώ αν $n \geq 3$, η γενική λύση είναι η $\Gamma(r) = Cr^{2-n} + C'$.

Για λόγους κανονικοποίησης, επιλέγουμε $C' = 0$, και η σταθερά C να εξαρτάται από το n.

Ορισμός 3.26. Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης του Laplace $-\Delta u = 0$ είναι η συνάρτηση

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x|, & n = 2 \\ \dfrac{1}{n(n-2)|B_1|}|x|^{2-n}, & n \geq 3, \end{cases}$$

όπου $|B_1|$ είναι ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας στον $\mathbb{R}^n$.

Σε αυτό το σημείο είμαστε σε θέση να εξετάσουμε ένα πλαίσιο στο οποίο η (3.6) ισχύει. Για το επόμενο θεώρημα, ορίζουμε

$$C_c^2(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^2(\mathbb{R}^n) : \exists R > 0, f(x) = 0 \ \forall |x| \geq R\}.$$

Θεώρημα 3.27. *Έστω $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Θεωρούμε τη συνέλιξη της θεμελιώδους λύσης με την f,*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y)\, dy.$$

Τότε $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, και η u είναι λύση της εξίσωσης του Poisson $-\Delta u = f$ στο $\mathbb{R}^n$.

Σε συνδυασμό με το Θεώρημα του Liouville, οδηγούμαστε στον εξής τύπο αναπαράστασης φραγμένων λύσεων στον $\mathbb{R}^n$, έως μια σταθερά.

Θεώρημα 3.28. *Έστω $n \geq 3$, και έστω $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Αν η $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ είναι μία φραγμένη λύση της εξίσωσης $-\Delta u = f$ στο $\mathbb{R}^n$, τότε υπάρχει σταθερά $C \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y)\, dy + C.$$

Απόδειξη. Η $v(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y)\, dy$ είναι λύση της $-\Delta v = f$ στο $\mathbb{R}^n$, από την Πρόταση 3.27. Η $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(y)| = 0$ αν $|y| \geq M$. Επίσης, η f είναι φραγμένη: $|f| \leq K$ στο $\mathbb{R}^n$, για κάποιο $K > 0$. Επομένως,

$$|v(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y)\, dy \right| \leq \int_{B_M} \frac{K}{|x-y|^{n-2}}\, dy.$$

Αν $|x| \leq 2M$ και $y \in B_M$, τότε $|x-y| \leq |x| + |y| \leq 3M$, επομένως $y \in B_{3M}(x)$. Άρα,

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq \int_{B_M} \frac{K}{|x-y|^{n-2}}\, dy \leq \int_{B_{3M}(x)} \frac{K}{|x-y|^{n-2}}\, dy = \int_0^{3M} \rho^{n-1} \int_{S^{n-1}} \frac{K}{\rho^{2-n}}\, d\sigma(x)' d\rho \\ &= K\sigma(S^{n-1}) \int_0^{3M} \rho\, d\rho = \frac{9}{2} K\sigma(S^{n-1}) M^2. \end{aligned}$$

Αν τώρα $|x| \geq 2M$ και $y \in B_M$, τότε $|x-y| \geq |x| - |y| \geq M$, άρα $|x-y|^{n-2} \geq M^{n-2}$, επομένως

$$|v(x)| \leq \int_{B_M} \frac{K}{|x-y|^{n-2}}\, dy \leq \int_{B_M} \frac{K}{M^{n-2}}\, dy = K|B_M| M^{2-n} = C_n K M^2.$$

Άρα, σε κάθε περίπτωση, $|v(x)| \leq C_n K M^2$, επομένως η v είναι φραγμένη. Τότε, η $u - v$ είναι φραγμένη αρμονική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, άρα από το Θεώρημα 3.24, η $u - v$ είναι σταθερή. □

Παρατήρηση 3.29. Το προηγούμενο θεώρημα μας περιγράφει όλες τις φραγμένες λύσεις της εξίσωσης $-\Delta u = f$ στο $\mathbb{R}^n$ για $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, όπου $n \geq 3$, αλλά πάντα υπάρχουν και μη φραγμένες λύσεις. Για μία κατασκευή, αρκεί σε μία φραγμένη λύση να προσθέσουμε μία μη φραγμένη αρμονική συνάρτηση στο $\mathbb{R}^n$, όπως πχ η $w(x) = x_1$, ή η $w(x) = x_1^2 - x_2^2$.

3.5 Ο τύπος του Poisson

Έχοντας έναν τύπο για λύσεις της εξίσωσης $-\Delta u = f$ στο $\mathbb{R}^n$, το φυσιολογικό ερώτημα που δημιουργείται είναι η ύπαρξη αντίστοιχου τύπου για την ίδια εξίσωση, αλλά σε γνήσια υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Όπως είδαμε από το Θεώρημα Μοναδικότητας (Θεώρημα 3.17), η μοναδικότητα λύσεων εφαρμόζεται στα προβλήματα συνοριακών τιμών, διαφορετικά το πρόβλημα μπορεί να έχει πολλές λύσεις. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $u(x) = 1$, $u(x) = x_2^2 - x_1^2$, είναι και οι δύο αρμονικές συναρτήσεις στην B_1, αλλά οι συνοριακές τους τιμές στο σύνορο ∂B_1 διαφέρουν.

Έχοντας ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών, περιμένουμε την ύπαρξη ενός τύπου που να καθορίζει την εξίσωση συναρτήσει της Δu και των συνοριακών δεδομένων. Ένας τέτοιος τύπος όμως υπάρχει μόνο σε πολύ απλές περιπτώσεις, μία εκ των οποίων είναι η μοναδιαία μπάλα B_1.

Ορισμός 3.30. Ο *πυρήνας του Poisson* για τη μοναδιαία μπάλα $B_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι η συνάρτηση

$$K(x,y) = \frac{1-|x|^2}{n|B_1|}\frac{1}{|x-y|^n}, \quad x \in B_1, y \in \partial B_1.$$

Μία αλλαγή μεταβλητής δείχνει ότι, για κάθε $x \in B_1$,

$$\int_{\partial B_1} K(x,y)\, d\sigma(y) = 1 \tag{3.7}$$

(*γιατί;*). Επίσης, αν σταθεροποιήσουμε $y \in \partial B_1$, τότε η $K(\cdot, y)$ είναι αρμονικη στην B_1.

Ο ολοκληρωτικός μετασχηματισμός με τον πυρήνα Poisson μίας οποιασδήποτε συνεχούς συνάρτησης ορισμένης στο ∂B_1 μας δίνει έναν τύπο λύσης για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών.

Θεώρημα 3.31. *Έστω $f \in C(\partial B_1)$. Ορίζουμε*

$$u(x) = \int_{\partial B_1} K(x,y) f(y)\, d\sigma(y) = \frac{1-|x|^2}{n|B_1|}\int_{\partial B_1} \frac{f(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma(y). \tag{3.8}$$

Τότε, η $u \in C^2(\mathbb{R}^n_+) \cap C(\overline{B_1})$ είναι μία λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{στην } B_1 \\ u = f, & \text{στο } \partial B_1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Συνδυάζοντας με το Θεώρημα μοναδικότητας προβλημάτων συνοριακών τιμών (Θεώρημα 3.17), έχουμε ότι η u που ορίζεται από την σχέση (3.8) είναι η *μοναδική* λύση του προβλήματος (3.9).

Έστω τώρα $B_r(x_0)$ μια μπάλα, $f \in C(\partial B_r(x_0))$, και έστω $u \in C^2(B_r(x_0)) \cap B(\overline{B_r(x_0)})$ μία λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{στην } B_r(x_0) \\ u = f, & \text{στο } \partial B_r(x_0). \end{cases} \tag{3.10}$$

Τότε, η συνάρτηση $v(z) = u(rz + x_0)$ για $z \in B_1$ ανήκει στον $C^2(B_1) \cap C(\overline{B_1})$, με συνοριακές τιμές $f(rz + x_0)$ για $z \in \partial B_1$, επομένως

$$u(rz + x_0) = v(z) = \int_{\partial B_1} K(z,w) f(w)\, d\sigma(w) = \frac{1-|z|^2}{n|B_1|}\int_{\partial B_1} \frac{f(rw + x_0)}{|z-w|^n}\, d\sigma(w),$$

για κάθε $z \in B_1$. Τότε, με μία αλλαγή μεταβλητής, αν $x = rz + x_0 \in B_r(x_0)$ και $y = rw + x_0$, έχουμε ότι

$$\frac{1 - |\frac{x-x_0}{r}|^2}{n|B_1|} \int_{\partial B_r} r^{1-n} \frac{f(y)}{|\frac{x-y}{r}|^n} \, d\sigma(y) = \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{n|B_1|r} \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{f(y)}{|x-y|^n} \, d\sigma(y).$$

Επομένως, ο πυρήνας του Poisson για την μπάλα $B_r(x_0)$ ορίζεται ως

$$K_{x_0,r}(x,y) = \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{n|B_1|r} \frac{1}{|x-y|^n},$$

και η μοναδική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.10) δίνεται από τον *τύπο του Poisson*

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x_0)} K_{x_0,r}(x,y) f(y) \, d\sigma(y) = \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{n|B_1|r} \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{f(y)}{|x-y|^n} \, d\sigma(y). \tag{3.11}$$

Βλέπουμε επομένως μία επαλήθευση του τύπου μέσης τιμής: αν η u είναι αρμονική σε μία γειτονιά της μπάλας $B_r(x_0)$, τότε η u λαμβάνει τις τιμές u στο $\partial B_r(x_0)$, επομένως

$$u(x_0) = \frac{r^2}{n|B_1|r} \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{u(y)}{|x_0 - y|^n} \, d\sigma(y) = \frac{1}{n|B_1|r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) \, d\sigma(y) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r)} \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\sigma.$$

3.6 Η ανισότητα του Harnack

Η ανισότητα του Harnack μας λέει ότι μη αρνητικές αρμονικές συναρτήσεις στο εσωτερικό μίας μπάλας δεν μπορούν να έχουν πολύ μεγάλες διακυμάνσεις.

Θεώρημα 3.32. *Έστω $B_r(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ μία μπάλα, και έστω $u \in C^2(B_r(x_0))$ μία αρμονική συνάρτηση, με $u \geq 0$ στην $B_r(x_0)$. Τότε, για κάθε $x \in B_{r/2}(x_0)$,*

$$\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}} u(x_0) \leq u(x) \leq 3 \cdot 2^{n-2} u(x_0).$$

Ειδικότερα,

$$\max_{B_{r/2}(x_0)} u \leq 3^n \min_{B_{r/2}(x_0)} u.$$

Απόδειξη.* Έστω $s \in (r/2, r)$. Η u είναι αρμονική σε μία γειτονιά της μπάλας $B_s(x_0)$, επομένως, από τον τύπο του Poisson (3.11),

$$u(x) = \frac{s^2 - |x - x_0|^2}{n|B_1|s} \int_{\partial B_s(x_0)} \frac{u(y)}{|x-y|^n} \, d\sigma(y).$$

Αν $|x - x_0| = r/2$, τότε για κάθε $y \in \partial B_s(x_0)$, έχουμε ότι

$$|x - y| = |x - x_0 + x_0 - y| \leq |x - x_0| + |y - x_0| = s + r/2,$$

και

$$|x - y| = |x - x_0 + x_0 - y| \geq |y - x_0| - |x - x_0| = s - r/2.$$

Αφου η $u \geq 0$, θα εχουμε ότι

$$\frac{s^2 - r^2/4}{n|B_1|s} \int_{\partial B_s(x_0)} \frac{u(y)}{(s + r/2)^n} \, d\sigma(y) \leq u(x) \leq \frac{s^2 - r^2/4}{n|B_1|s} \int_{\partial B_s(x_0)} \frac{u(y)}{(s - r/2)^n} \, d\sigma(y).$$

Το αριστερό μέλος της πρώτης ανισότητας είναι ίσο με

$$\frac{\left(s^2 - r^2/4\right) s^{n-2}}{(s + r/2)^n} \frac{1}{n|B_1|s^{n-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} u(y)\, d\sigma(y) = \frac{\left(s^2 - r^2/4\right) s^{n-2}}{(s + r/2)^n} u(x_0),$$

από τον τύπο μέσης τιμής. Επίσης, αφήνοντας το $s \to r^-$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\left(s^2 - r^2/4\right) s^{n-2}}{(s + r/2)^n} = \frac{\left(r^2 - r^2/4\right) r^{n-2}}{(3r/2)^n} = \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}},$$

επομένως, για κάθε $x \in \partial B_{r/2}(x_0)$,

$$\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}} u(x_0) \leq u(x).$$

Άρα, από την αρχή ελαχίστου, για κάθε $x \in B_{r/2}(x_0)$,

$$\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}} u(x_0) \leq \min_{x \in \partial B_{r/2}(x_0)} u(x) \leq \min_{x \in \overline{B_{r/2}(x_0)}} u(x) \leq u(x).$$

Ομοίως δείχνουμε την άλλη ανισότητα.

Τέλος, για την τελευταία ανισότητα, λόγω συνέχειας της u υπάρχουν $x_1, y_1 \in \overline{B_{r/2}(x_0)}$ τέτοια ώστε $\min_{B_{r/2}(x_0)} u = u(x_1)$ και $\max_{B_{r/2}(x_0)} u = u(y_1)$. Τότε,

$$\max_{B_{r/2}(x_0)} u = u(y_1) \leq 3 \cdot 2^{n-2} u(x_0) \leq 3 \cdot 2^{n-2} \frac{3^{n-1}}{2^{n-2}} u(x_1) = 3^n \min_{B_{r/2}(x_0)} u.$$

□

3.7 Προβλήματα

1. Έστω $u \in C^1(\Omega)$ και $B_r(x) \subseteq \Omega$. Αν

$$f(s) = \frac{1}{\sigma(\partial B_s)} \int_{\partial B_s(x)} u\, d\sigma,$$

για $0 < s < r$, τότε $\lim_{s \to 0^+} f(s) = u(x)$.

2. Έστω $f : S^1 \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση, όπου $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος, με παραμετροποίηση $S^1 = \{(\cos\phi, \sin\phi) : 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$.

   i) Να αποδειχθεί οτι η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{στην } B_1 \\ u = f, & \text{στο } \partial B_1. \end{cases}$$

   δίνεται από τον τύπο

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f((\cos\phi, \sin\phi))}{|x - (\cos\phi, \sin\phi)|^2}\, d\phi.$$

   ii) Χωρίς να χρησιμοποιηθεί ο προηγούμενος τύπος, να βρεθεί η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών για τη συνάρτηση $f(\cos\phi, \sin\phi) = \cos\phi$.

iii) Θέτοντας $x = (1/2, 0)$, δείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi}{5 - 4\cos\phi}\, d\phi = \frac{\pi}{3}.$$

iv)* Γενικότερα, αν $|a| > 1$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a - \cos\phi}\, d\phi.$$

3. Έστω $f : S^2 \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση, όπου S^2 η μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$, με παραμέτρηση

$$S^2 = \{(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) : 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi < 2\pi\}.$$

Να αποδειχθεί οτι η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{στην } B_1 \\ \ \ u = f, & \text{στο } \partial B_1. \end{cases}$$

δίνεται από τον τύπο

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)}{|x - (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)|^3} \sin\theta\, d\phi d\theta.$$

4. Έστω $B_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ ο μοναδιαίος δίσκος. Έστω επισης $u \in C^2(B_1) \cap C(\overline{B_1})$ η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{στην } B_1 \\ u(x,y) = x^2, & \text{για } (x,y) \in \partial B_1. \end{cases}$$

i) Να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο της u, και τα σημεία στα οποία λαμβάνονται.

ii) Να υπολογιστεί η τιμή $u(0,0)$.

iii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{B_1} |u|$.

5. Έστω $B_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ ο μοναδιαίος δίσκος. Έστω επισης $u \in C^2(B_1) \cap C(\overline{B_1})$ η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{στην } B_1 \\ u(x,y) = |x|, & \text{για } (x,y,z) \in \partial B_1. \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η τιμή $u(0,0,0)$.

6. i) Να αποδειχθούν οι σχέσεις (3.4) και (3.5) για υφαρμονικές και υπεραρμονικές συναρτήσεις $u \in C^2(\Omega)$.

ii) Αντιστρόφως, έστω $u \in C^2(\Omega)$ που ικανοποιεί τη σχέση $u(x) \le \dfrac{1}{\sigma(\partial B_r)} \displaystyle\int_{\partial B_r(x)} u\, d\sigma$ για κάθε μπάλα $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$. Να αποδειχθεί ότι η u είναι υφαρμονική στο Ω.

iii) Ομοίως, έστω $u \in C^2(\Omega)$ που ικανοποιεί τη σχέση $u(x) \le \dfrac{1}{|B_r|} \displaystyle\int_{B_r(x)} u$ για κάθε μπάλα $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$. Να αποδειχθεί ότι η u είναι υφαρμονική στο Ω.

7. Έστω $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$, όπου $B \subseteq \mathbb{R}^3$ η μοναδιαία μπάλα με κέντρο 0. Υποθέτουμε ότι $-\Delta u + 6 \leq 0$ στην B, και $u(x,y,z) \leq 1$ για κάθε $(x,y,z) \in \partial B$. Να αποδειχθεί ότι $u(x,y,z) \leq x^2+y^2+z^2$ για κάθε $(x,y,z) \in B$.

8. Έστω $u \in C^2(\Omega)$ μία θετική αρμονική συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι η u^p είναι υφαρμονική για κάθε $p \geq 1$, και η u^p είναι υπεραρμονική για κάθε $p \in (0,1]$.

9. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό υποσύνολο, και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ αρμονική συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = |\nabla u(x)|^2$ είναι υφαρμονικη στο Ω.

10. Έστω $\Omega = B_2 \setminus \overline{B_1} = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < x < 2\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Να βρεθεί μία λύση $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ στο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = -20|x|^2, & \text{στο } \Omega, \\ u(x) = 1, & \text{αν } |x| = 1, \\ u(x) = 17, & \text{αν } |x| = 2. \end{cases}$$

Είναι η λύση μοναδική;

11. i) Να αποδειχθεί ότι ο τελεστής Laplace μετατίθεται με μεταφορές και ανακλάσεις: αν $y \in \mathbb{R}^n$ και θεωρήσουμε τους τελεστές $\tau_y, r : C^2(\mathbb{R}^n) \to C^2(\mathbb{R}^n)$ με

$$\tau_y f(x) = f(x-y), \quad rf(x) = f(-x),$$

να αποδειχθεί ότι $\Delta(\tau_y f) = \tau_y(\Delta f)$ και $\Delta(rf) = r(\Delta f)$ για κάθε $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

ii) Να αποδειχθεί ότι ο τελετής Laplace μετατίθεται με στροφές: αν $\theta \in [0, 2\pi]$ και $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι ο γραμμικός τελεστής

$$T_\theta(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ -x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix},$$

και αν θέσουμε $R_\theta : C^2(\mathbb{R}^2) \to C^2(\mathbb{R}^2)$ με

$$R_\theta f(x,y) = f(T_\theta(x,y)),$$

τότε $\Delta(R_\theta f) = R_\theta(\Delta f)$ για κάθε $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

12. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα χωρίο, και $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$.

i) Αν η $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ είναι μία λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{στο } \Omega, \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega, \end{cases}$$

να αποδειχθεί ότι $\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |g|$.

ii) Γενικότερα, αν η $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ είναι μία λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega, \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega, \end{cases}$$

τότε $\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq C_\Omega \max_{\overline{\Omega}} |f| + \max_{\partial\Omega} |g|$, όπου $C_\Omega > 0$ είναι μία σταθερά που εξαρτάται από το Ω.

13. Να αποδειχθεί το μονόπλευρο Θεώρημα του Liouville: αν η $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι αρμονική και κάτω φραγμένη, τότε η u είναι ίση με μία σταθερά.

14. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ συνεκτικό χωρίο, και $u \in C^2(\Omega)$ με $u \geq 0$ μία αρμονική συνάρτηση στο Ω. Αν $u(x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in \Omega$, να αποδειχθεί ότι $u \equiv 0$ στο Ω.

3.8 Επιπλέον προβλήματα*

1. Έστω $u \in C(\Omega)$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Omega$ και $r > 0$ με $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$, έχουμε ότι
$$u(x) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} u.$$
Να αποδειχθεί ότι $u \in C^2(\Omega)$, και η u είναι αρμονική συνάρτηση στο Ω.

2. Έστω $u \in C^2(\Omega)$, και έστω $x \in \Omega, r > 0$ τέτοια ώστε $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$. Αν
$$f(s) = \frac{1}{|B_s(x)|} \int_{B_s(x)} u(y),$$
για $s \in (0, r)$, να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, r)$, και για $s \in (0, r)$,
$$f'(s) = \frac{1}{2s|B_s(x)|} \int_{B_s(x)} (s^2 - |y - x|^2) \Delta u(y)\, dy.$$

3. Έστω (u_m) μία ακολουθία αρμονικών συναρτήσεων στο Ω, με $u_m \to u$ ομοιόμορφα στο Ω. Να αποδειχθεί ότι η u είναι αρμονική στο Ω.

4. Για $n = 2$ και $n = 3$, να αποδειχθεί ο τύπος (3.7).

5. i) Έστω B η μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^3$. Να αποδειχθεί ότι
$$\int_B x_i^2\, dx = \frac{|B|}{3} \;\; \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \text{και} \quad \int_B x_i x_j\, dx = 0 \;\; \forall i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j.$$
   ii) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό, και έστω $u \in C^2(\Omega)$ τέτοια ώστε
$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{r^2} \left(u(x) - \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} u \right) = 0$$
   για κάθε $x \in \Omega$. Να αποδειχθεί ότι η u είναι αρμονική στο Ω.

6. (Θεώρημα του Harnack) Έστω (u_m) μία αύξουσα ακολουθία αρμονικών συναρτήσεων στο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, δηλαδή $u_m(x) \leq u_{m+1}(x)$ για κάθε $x \in \Omega$. Έστω επίσης $x_0 \in \Omega$.
   i) Αν η $(u_m(x_0))$ έχει όριο όταν το $m \to \infty$, να αποδειχθεί ότι η u_m συγκλίνει κατά σημείο σε μία αρμονική συνάρτηση στο Ω.
   ii) Αν $u_m(x_0) \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty$, να αποδειχθεί ότι $u_m(x) \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty$ για κάθε $x \in \Omega$.

7. i) Έστω $x_1, \dots x_N \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$ τέτοια ώστε το σύνολο
$$U = \bigcup_{i=1}^{N} B_r(x_i)$$
   να είναι συνεκτικό. Έστω $x \in B_r(x_1)$, και ορίζουμε το σύνολο των σημείων $y \in U$ για τα οποία υπάρχει αλυσίδα από μπάλες τέτοιες ώστε οι διαδοχικές να έχουν μη κενή τομή, η πρώτη να περιέχει το x και η τελευταία να περιέχει το y, δηλαδή
$$V = \{y \in U : \exists M \leq N, \exists i_1 = 1, \dots i_M : B_r(x_{i_j}) \cap B_r(x_{i_{j+1}}) \neq \emptyset, y \in B_r(x_{i_M})\}.$$
   Να αποδειχθεί ότι $V = U$.

ii) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα χωρίο, και $U \subseteq \Omega$ ένα συνεκτικό και φραγμένο χωρίο με $\overline{U} \subseteq \Omega$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $C_U > 0$ τέτοια ώστε, αν η $u \in C^2(\Omega)$ είναι μία αρμονική συνάρτηση στο Ω με $u \geq 0$, τότε $\max_U u \leq C \min_U u$.

8. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό σύνολο, και $f \in L^1(\Omega)$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in \Omega$, να αποδειχθεί ότι οι εξομαλυντές f_ε συγκλίνουν στην f στο x_0, δηλαδή

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} f_\varepsilon(x_0) = f(x_0).$$

9. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ομαλό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και $f \in C(\Omega)$. Να αποδειχθεί ότι, αν οι $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ είναι ελαχιστοποιητές του τελεστή

$$Tu = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu$$

στην κλάση των $C^2(\overline{\Omega})$ συναρτήσεων, με $u = v$ στο $\partial\Omega$, τότε $u = v$ στο Ω. (*Υπόδειξη:* υπολογίστε την ποσότητα $T\left(\frac{u+v}{2}\right) - \frac{1}{2}(Tu + Tv)$.)

10. Έστω $u : B_2 \to \mathbb{R}$ αρμονική συνάρτηση, με $u \equiv 0$ στην B_1. Να αποδειχθεί ότι $u \equiv 0$ στην B_2. (*Υπόδειξη:* χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι η u είναι αναλυτική γύρω από κάθε σημείο της B_2.)

11. Έστω $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία μη μηδενική αρμονική συνάρτηση. Ορίζουμε τη *συνάρτηση συχνότητας του Almgren*

$$N(r) = \frac{r \displaystyle\int_{B_r} |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_{\partial B_r} u^2 \, d\sigma}.$$

Να αποδειχθεί ότι η N είναι καλά ορισμένη για $r > 0$, και ότι η N είναι αύξουσα στο $(0, \infty)$.

12. Θεωρούμε τον τυπικό εξομαλυντή $\phi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ του Ορισμού 3.18.

i) Να αποδειχθεί ότι, για κάθε πολυδείκτη α, υπάρχει φυσικός αριθμός $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και πολυώνυμο $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε, για κάθε $x \in B$,

$$D^\alpha \phi(x) = \frac{P(x_1, \dots x_n)}{(|x|^2 - 1)^k} e^{\frac{1}{|x|^2 - 1}}.$$

ii) Να αποδειχθεί ότι $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, με $D^\alpha \phi(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ με $|x| \geq 1$.

4 Η εξίσωση της θερμότητας

4.1 Εισαγωγή

Η εξίσωση της θερμότητας είναι η μερική διαφορική εξίσωση

$$\partial_t u - \Delta u = 0.$$

Η γενικότερη εξίσωση $\partial_t u - \Delta u = f$ ονομάζεται *μη ομογενής* εξίσωση της θερμότητας. Η άγνωστη συνάρτηση $u = u(x,t)$ είναι ορισμένη σε ένα χωρίο $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, όπου θεωρούμε ότι τα $(x,t) \in \Omega_0$ είναι τέτοια ώστε $x \in \mathbb{R}^n$ και $t \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, η Λαπλασιανή Δu θεωρείται μόνο ως προς το x, δηλαδή ως προς τις πρώτες n μεταβλητές.

Στην εξίσωση της θερμότητας το t μοντελοποιεί τον χρόνο, και το x μοντελοποιεί σημεία στον χώρο. Έτσι, για να μελετήσουμε την εξέλιξη της θερμότητας σε ένα χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ το οποίο δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο, συνήθως θεωρούμε την εξίσωση σε *κυλίνδρους*, οπότε

$$(x,t) \in \Omega_T := \Omega \times (0,T],$$

όπου $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ και το $(0,T] \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα διάστημα, με $T > 0$. Σε αυτό το πλαίσιο, βλέπουμε ότι οι αρμονικές συναρτήσεις ως προς $x \in \Omega$ είναι ακριβώς οι λύσεις της εξίσωσης της θερμότητας οι οποίες δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο.

Αφού η εξίσωση της θερμότητας μοντελοποιεί εξέλιξη, στην περίπτωση προβλημάτων που τίθενται σε χωρία Ω_T, μία από τις συνθήκες που θα πρέπει να μας δίνεται είναι οι τιμές του φαινομένου την χρονική στιγμή $t = 0$ (δηλαδή οι τιμές $u(x,0)$), οπότε μιλάμε για προβλήματα *αρχικών τιμών*. Όμως, οι αρχικές τιμές δεν μπορούν να προκαθορίσουν την εξέλιξη στο "κάθετο" σύνορο $\partial\Omega \times [0,T]$, οπότε οι τιμές της u θα πρέπει να μας δίνονται και σε αυτό το τμήμα του συνόρου. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις

$$u_1(x,t) = 0, \quad u_2(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-2)^2}{4t}}, & x \in [0,1],\ t \in (0,1] \\ 0, & x \in [0,1],\ t = 0 \end{cases}$$

είναι λύσεις της εξίσωσης της θερμότητας στον κύλινδρο $(-1,1) \times (0,1]$, συνεχείς στο $[-1,1] \times [0,1]$ (*γιατί;*), αλλά έχουν διαφορετικές συνοριακές τιμές στο $\partial((-1,1)) \times [0,1]$.

Ορισμός 4.1. Έστω $\Omega_T = \Omega \times (0,T] \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Το *παραβολικό σύνορο* του Ω_T είναι το σύνολο

$$\partial_p \Omega_T := (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times (0,T]).$$

Έτσι, το τοπολογικό σύνορο (στον $\mathbb{R}^{n+1}$) είναι ίσο με $\partial\Omega_T = \partial_p\Omega_T \cup (\Omega \times \{T\})$, και η ένωση των δύο τελευταίων συνόλων είναι ξένη.

Με αυτόν τον ορισμό, παρατηρούμε ότι η "κορυφή" $\Omega \times \{T\}$ ανήκει στο "παραβολικό εσωτερικό" του Ω_T.

Για να έχει νόημα η εξίσωση της θερμότητας, θέλουμε η u να είναι συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς t και δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς x_i, για $i = 1, \dots n$. Για να προσαρμοστούμε στο παραβολικό πρόβλημα, θέλουμε η u να ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες **και** στην κορυφή $\Omega \times \{T\}$. Έτσι, θα θεωρούμε ότι οι λύσεις θα ανήκουν στον χώρο

$$C_1^2(\Omega_T) = \{u : \Omega_T \to \mathbb{R} : \text{οι } u, \nabla u, D^2 u, \partial_t u \in C(\Omega_T)\}.$$

Προσοχή: υποθέτουμε έτσι ότι η u είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς x **και** στην κορυφή $\Omega \times \{T\}$, και η $\partial_t u$ έχει συνεχή επέκταση στο $\Omega \times \{T\}$. Επίσης, το ανάδελτα ∇u θεωρείται ως προς τις x-μεταβλητές.

Όπως και στην εξίσωση του Laplace, ορίζουμε ότι μία συνάρτηση $u \in C_1^2(\Omega_T)$ είναι υπολύση της εξίσωσης της θερμότητας, αν $\partial_t u - \Delta u \leq 0$. Ομοίως, η $u \in C_1^2(\Omega_T)$ είναι υπερλύση της εξίσωσης της θερμότητας, αν $\partial_t u - \Delta u \geq 0$.

4.2 Η αρχή μεγίστου

Όπως και στην περίπτωση των υφαρμονικών συναρτήσεων, οι υπολύσεις της εξίσωσης της θερμότητας ικανοποιούν την αρχή μεγίστου. Αντίστοιχα με τις αρμονικές συναρτήσεις, και εδώ οι τιμές της u στο εσωτερικό θα φράσσονται από τις τιμές της u στο σύνορο, αλλά το σύνορο θεωρείται με την παραβολική έννοια.

Πρόταση 4.2. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο χωρίο, $T > 0$, και $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ μία υπολύση της εξίσωσης της θερμότητας, δηλαδή η u ικανοποιεί τη σχέση*

$$\partial_t u - \Delta u \leq 0$$

στο Ω_T. Τότε ισχύει η αρχή μεγίστου:

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\partial_p \Omega_T} u.$$

Απόδειξη. Θα μετατρέψουμε αρχικά την u σε μία γνήσια υπολύση της εξίσωσης της θερμότητας: για $\varepsilon > 0$, θέτουμε

$$u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon\, t.$$

Τότε,

$$\partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = \partial_t u - \Delta u - \varepsilon \leq -\varepsilon\,. \tag{4.1}$$

Σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$. Έστω ότι υπάρχει $(x_0, t_0) \in \Omega_T$, τέτοιο ώστε

$$u_\varepsilon(x_0, t_0) = \max_{\overline{\Omega_T}} u_\varepsilon. \tag{4.2}$$

Τότε, έχουμε ότι

$$\partial_t u_\varepsilon(x_0, t_0) = \lim_{t \to t_0^-} \frac{u_\varepsilon(x_0, t) - u_\varepsilon(x_0, t_0)}{t - t_0}.$$

Αφού η u έχει μέγιστο στο (x_0, t_0), ισχύει ότι $u_\varepsilon(x_0, t) - u_\varepsilon(x_0, t_0) \leq 0$. Επιπλέον, το $t \to t_0^-$, άρα $t - t_0 < 0$, επομένως

$$\partial_t u_\varepsilon(x_0, t_0) \geq 0.$$

Άρα, από την (4.1),

$$\Delta u_\varepsilon(x_0, b) \geq \varepsilon + \partial_t u_\varepsilon(x_0, t_0) \geq \varepsilon\,. \tag{4.3}$$

Σταθεροποιούμε τώρα $i = 1, \ldots n$, και θεωρούμε τη συνάρτηση $g(r) = u(x_0 + re_i, t_0)$, η οποία είναι καλά ορισμένη για $r \in (-\delta, \delta)$, για κάποιο $\delta > 0$. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\delta, \delta)$, και αφού έχει μέγιστο στο 0, έχουμε ότι $g'(0) = 0$ (από το Θεώρημα του Fermat). Τότε, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0} \frac{g(r) + g(-r) - 2g(0)}{r^2} &= \lim_{r \to 0} \frac{g'(r) - g'(-r)}{2r} = \lim_{r \to 0} \frac{g'(r) - g'(0)}{2r} + \lim_{r \to 0} \frac{g'(-r) - g'(0)}{-2r} \\ &= \lim_{r \to 0} \frac{g'(r) - g'(0)}{2r} + \lim_{s \to 0} \frac{g'(s) - g'(0)}{2s} = g''(0). \end{aligned}$$

Αφού η g έχει μέγιστο στο 0, $g(r)+g(-r)-2g(0) \leq 0$ για $r \in (-\delta, \delta)$, επομένως $g''(0) \leq 0$. Όμως, $g''(0) = \partial_{ii} u_\varepsilon(x_0)$, άρα $\partial_{ii} u_\varepsilon(x_0, t_0) \leq 0$. Η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $i = 1, \ldots n$, άρα $\Delta u_\varepsilon(x_0, t_0) \leq 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο, από την (4.3), άρα δεν υπάρχει $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ τέτοιο ώστε να ισχύει η (4.2), επομένως

$$u_\varepsilon(x,t) < \max_{\overline{\Omega_T}} u_\varepsilon \quad \forall (x,t) \in \Omega_T,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι το μέγιστο της u_ε στο $\overline{\Omega}_T$ λαμβάνεται στο $\partial_p \Omega_T$, άρα

$$u_\varepsilon(x,t) \leq \max_{\partial_p \Omega_T} u_\varepsilon \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega_T}.$$

Αφού $t \geq 0$, έχουμε ότι

$$u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon\, t \leq u(x,t),$$

άρα, για κάθε $(x,t) \in \overline{\Omega_T}$,

$$u(x,t) = u_\varepsilon(x,t) + \varepsilon\, t \leq \max_{\partial_p \Omega_T} u_\varepsilon + \varepsilon\, t \leq \max_{\partial_p \Omega_T} u + \varepsilon\, t,$$

και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ συνεπάγεται το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 4.3. Γενικότερα, όπως και στις αρμονικές συναρτήσεις, ισχύει η *ισχυρή αρχή μεγίστου*: αν η u λαμβάνει το μέγιστό της στο $(x_0, t_0) \in \Omega_T$, τότε η u είναι σταθερή στο $\Omega \times (0, t_0]$. Μία απόδειξη χρησιμοποιεί ένα ανάλογο του τύπου μέσης τιμής για λύσεις της εξίσωσης της θερμότητας.

Θεωρώντας την $-u$, οδηγούμαστε στην *αρχή ελαχίστου*.

Πόρισμα 4.4. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο χωρίο, $T > 0$, και $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ μία υπερλύση της εξίσωσης της θερμότητας, δηλαδή $\partial_t u - \Delta u \geq 0$ στο Ω_T. Τότε ισχύει η αρχή ελαχίστου:*

$$\min_{\overline{\Omega_T}} u = \min_{\partial_p \Omega_T} u.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την $v = -u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$, η οποία είναι υπολύση της εξίσωσης της θερμότητας στο Ω_T *(γιατί;)*. Τότε,

$$\min_{\overline{\Omega_T}} v = -\max_{\overline{\Omega_T}} u, \quad \min_{\partial_p \Omega_T} v = -\max_{\partial_p \Omega_T} u,$$

και χρησιμοποιούμε την αρχή μεγίστου για τη u. □

Έτσι, έχουμε το επόμενο θεώρημα μοναδικότητας για προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών.

Θεώρημα 4.5. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο χωρίο, $f \in C(\Omega_T)$, $g \in C(\partial_p \Omega_T)$. Τότε υπάρχει το πολύ μία λύση $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ στο πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f, & \text{στο } \Omega_T \\ u = g, & \text{στο } \partial_p \Omega_T. \end{cases}$$

Στην περίπτωση όπου το $\Omega = \mathbb{R}^n$, για να φράξουμε τις τιμές της u στο $\mathbb{R}^n \times (0, T]$, θα πρέπει να έχουμε έναν έλεγχο για το πως συμπεριφέρεται η u για μεγάλα x, για κάθε $t > 0$. Μία απλή τέτοια περίπτωση προκύπτει όταν η u να είναι φραγμένη.

Πρόταση 4.6. *Έστω $T > 0$, $g \in C(\mathbb{R}^n)$ άνω φραγμένη, $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ μία άνω φραγμένη υπολύση του προβλήματος*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u \leq 0, & \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u(x,0) = g(x), & \text{στο } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases}$$

Τότε ισχύει η αρχή μεγίστου:

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

Προσοχή: η υπόθεση ότι η λύση είναι άνω φραγμένη αφορά τη λύση και για $t > 0$, όχι μόνο στο $t = 0$!

Απόδειξη. Έστω ότι $u(x,t) \leq M$ για κάποιο $M \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $N = \sup_{\mathbb{R}^n} g$, τότε λόγω συνέχειας της u μέχρι το σύνορο $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, έχουμε ότι $N \leq M$. Έστω $\varepsilon > 0$, θέτουμε

$$u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - 2n\,\varepsilon\, t - \varepsilon\, |x|^2.$$

Τότε,

$$\partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = \partial_t u - \Delta u - 2n\,\varepsilon + \varepsilon\, \Delta(|x|^2) \leq 0.$$

Έστω $R > 0$. Θεωρούμε την u_ε ως υπολύση της εξίσωσης της θερμότητας στο χωρίο $B_R \times (0,T]$. Τότε, για $x \in B_R$,

$$u_\varepsilon(x,0) = u(x,0) - \varepsilon\, |x|^2 \leq u(x,0) \leq g(x) \leq N,$$

και επιπλέον, για $x \in \partial B_R$ και $t \in [0,T]$,

$$u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - 2n\,\varepsilon\, t - \varepsilon\, |x|^2 \leq M - \varepsilon\, R^2.$$

Για M, ε σταθερά, για μεγάλα $R > 0$ έχουμε ότι $M - \varepsilon\, R^2 \leq N$, επομένως $u_\varepsilon(x,t) \leq N$ για $(x,t) \in \partial_p(B_R \times (0,T])$. Επομένως, από την αρχή μεγίστου (Πρόταση 4.2), θα έχουμε ότι $u_\varepsilon(x,t) \leq N$ στο $B_R \times [0,T]$, για μεγάλα $R > 0$. Αφήνοντας το $R \to \infty$, θα έχουμε ότι $u_\varepsilon(x,t) \leq N$ στο $\mathbb{R}^n \times [0,T]$, επομένως

$$u(x,t) = u_\varepsilon(x,t) + 2n\,\varepsilon\, t + \varepsilon\, |x|^2 \leq N + 2n\,\varepsilon\, t + \varepsilon\, |x|^2,$$

για κάθε $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$, για κάθε $\varepsilon > 0$. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Αντίστοιχα, ισχύει η αρχή ελαχίστου για υπερλύσεις:

Πρόταση 4.7. *Έστω $T > 0$, $g \in C(\mathbb{R}^n)$, $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ μία κάτω φραγμένη υπερλύση της εξίσωσης*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u \geq 0, & \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u = g, & \text{στο } \partial_p(\Omega \times (0,T]). \end{cases}$$

Τότε ισχύει η αρχή ελαχιστου:

$$\inf_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \inf_{\mathbb{R}^n} g.$$

Τέλος, οδηγούμαστε σε μοναδικότητα λύσεων στο *πρόβλημα του Cauchy*.

Πρόταση 4.8. *Έστω $T > 0$, $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, $g \in C(\mathbb{R}^n)$. Τότε, υπάρχει το πολύ μία φραγμένη $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ λύση της εξίσωσης*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f, & \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u = g, & \text{στο } \partial_p(\Omega \times (0,T]). \end{cases}$$

Η υπόθεση του ότι η u είναι φραγμένη είναι απαραίτητη ακόμα και αν υποθέσουμε ότι $f, g \equiv 0$. Πράγματι, υπάρχει μία συνάρτηση $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ που λύνει την εξίσωση

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = 0, & \text{στο } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases}$$

με $u \not\equiv 0$! Οποιαδήποτε τέτοια u ονομάζεται *μη φυσική λύση* της εξίσωσης της θερμότητας.

4.3 Η θεμελιώδης λύση

Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης της θερμότητας είναι μία λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \partial_t \Phi - \Delta \Phi = 0, & \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ \Phi(x,0) = \delta_0, & \text{στο } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

όπου δ_0 είναι το Dirac δέλτα στο $0 \in \mathbb{R}^n$. Αν η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μία "καλή" συνάρτηση, αναμένουμε τότε ότι η συνάρτηση

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) f(y)\, dy$$

είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x), & \text{στο } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

Πράγματι, άτυπα υπολογίζουμε

$$\partial_t u(x) - \Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\partial_t \Phi(x-y,t) - \Delta_x \Phi(x-y,t)\right) f(y)\, dy = 0,$$

και, για $t = 0$,

$$u(x,0) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_0(x-y) f(y)\, dx = f(x).$$

Θα βρούμε τώρα έναν τύπο για τη θεμελιώδη λύση. Θα υποθέσουμε ότι η Φ είναι ακτινική ως προς x, αλλά επειδή υπεισέρχεται η μεταβλητή t, θα ζητήσουμε ως όρισμα της συνάρτησης τη μεταβλητή $t^\alpha \rho$, όπου το α θα προσδιοριστεί αργότερα. Για μεγαλύτερη ευελιξία, θα ζητήσουμε τελικά η λύση να είναι της μορφής

$$\Phi(x,t) = t^\beta v(t^\alpha \rho),$$

όπου $\rho = |x|$. Τότε, υπολογίζουμε:

$$\partial_i \Phi = t^{\alpha+\beta} v'(t^\alpha \rho) \frac{x_i}{\rho},$$

οπότε

$$\partial_{ii} \Phi = t^{2\alpha+\beta} v''(t^\alpha \rho) \frac{x_i^2}{\rho^2} + t^{\alpha+\beta} v'(t^\alpha \rho) \frac{\rho - \frac{x_i^2}{\rho}}{\rho^2},$$

άρα

$$\Delta \Phi = t^{2\alpha+\beta} v''(t^\alpha \rho) + t^{\alpha+\beta} \frac{n-1}{\rho} v'(t^\alpha \rho).$$

Τέλος,

$$\partial_t \Phi = \beta t^{\beta-1} v(t^\alpha \rho) + \alpha t^{\alpha+\beta-1} \rho v'(t^\alpha \rho).$$

Επομένως, για να ικανοποιείται η $\partial_t \Phi - \Delta\Phi = 0$ στο $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, θα πρέπει να έχουμε

$$t^{2\alpha+\beta} v''(t^\alpha \rho) + t^{\alpha+\beta} \frac{n-1}{\rho} v'(t^\alpha \rho) - \alpha t^{\alpha+\beta-1} \rho v'(t^\alpha \rho) - \beta t^{\beta-1} v(t^\alpha \rho) = 0.$$

Θέτουμε $t^\alpha \rho = s$, και τότε θέλουμε

$$t^{2\alpha+\beta} v''(s) + \left(t^{2\alpha+\beta} \frac{n-1}{s} - \alpha t^{\beta-1} s \right) v'(s) - \beta t^{\beta-1} v(s) = 0,$$

άρα

$$t^{2\alpha+1} v''(s) + \left(t^{2\alpha+1} \frac{n-1}{s} - \alpha s \right) v'(s) - \beta v(s) = 0.$$

Προκειμένου η προηγούμενη εξίσωση να περιέχει μόνο τη μεταβλητή s, θα θέσουμε $a = -1/2$, και τότε

$$v''(s) + \left(\frac{n-1}{s} + \frac{s}{2} \right) v'(s) - \beta v(s) = 0.$$

Για να μετατρέψουμε την προηγούμενη ποσότητα στην παράγωγο μίας συνάρτησης, θα θέσουμε $\beta = -n/2$, και τότε

$$s^{n-1} v''(s) + (n-1) s^{n-2} v'(s) + \frac{1}{2} s^n v'(s) + \frac{n}{2} s^{n-1} v(s) = 0,$$

άρα

$$(s^{n-1} v'(s))' + \left(\frac{s^n}{2} v(s) \right)' = 0,$$

που συνεπάγεται ότι

$$s^{n-1} v'(s) + \frac{s^n}{2} v(s) = C.$$

Παίρνοντας το $C = 0$, θα έχουμε τότε ότι

$$v'(s) + \frac{s}{2} v(s) = 0.$$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι ο $e^{\int s/2\, ds} = e^{s^2/4}$, επομένως

$$\left(e^{s^2/4} v(s) \right)' = C \Rightarrow v(s) = C e^{-s^2/4}.$$

Επιλέγοντας τη σταθερά C κατάλληλα και αντικαθιστώντας στον τύπο $\Phi(x,t) = t^\beta v(t^\alpha \rho)$, οδηγούμαστε στον εξής ορισμό.

Ορισμός 4.9. Η *θεμελιώδης λύση* της εξίσωσης της θερμότητας στο $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ είναι η συνάρτηση

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

για $x \in \mathbb{R}^n$ και $t > 0$.

Η σταθερά $\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}$ με την οποία διαιρούμε δικαιολογείται από το εξής λήμμα.

Λήμμα 4.10. *Για κάθε $t > 0$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\, dx = 1.$$

Απόδειξη.* Γράφουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\, dx.$$

Θέτουμε $y = \frac{x}{\sqrt{4t}}$, και τότε $dy = \frac{1}{(4t)^{n/2}}\, dx$, επομένως

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\, dx = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2}\, dy = \frac{1}{\pi^{n/2}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy \right)^n = 1.$$

□

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \neq 0$,

$$\lim_{t \to 0^+} \Phi(x,t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = 0,$$

ενώ

$$\lim_{t \to 0^+} \Phi(0,t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} = \infty$$

(γιατί;). Έτσι, αφού το ολοκλήρωμα της $\Phi(x,t)$ ως προς x διατηρείται σταθερό για κάθε $t > 0$, βλέπουμε ότι η $\Phi(x,t)$ προσεγγίζει το Dirac δέλτα στο 0 όταν το $t \to 0^+$.

Μπορούμε τώρα να δούμε ένα πλαίσιο στο οποίο η θεμελιώδης λύση μας δίνει έναν τύπο για λύσεις στο *πρόβλημα του Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u = g, & \text{στο } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Πρόταση 4.11. *Έστω $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Τότε, η συνάρτηση*

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\, dy, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ g(x), & t = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

ανήκει στον $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, και είναι λύση στο πρόβλημα αρχικών τιμών (4.4).

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η u της προηγούμενης πρότασης είναι φραγμένη, αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $t > 0$,

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |g(y)|\, dy \leq \frac{\|g\|_\infty}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dy \\ &= \frac{\|g\|_\infty}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4t}}\, dz = \|g\|_\infty, \end{aligned}$$

από το Λήμμα 4.10, ενώ για $t = 0$,

$$|u(x,t)| = |g(x)| \leq \|g\|_\infty.$$

Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $t \geq 0$, έχουμε ότι $|u(x,t)| \leq \|g\|_\infty$, επομένως η u είναι φραγμένη. Έτσι, συνδυάζοντας με την Πρόταση 4.8, η συνάρτηση της Πρότασης 4.11 είναι η **μοναδική** φραγμένη λύση στο πρόβλημα αρχικών τιμών (4.4).

Παρατήρηση 4.12. Έστω $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, τέτοια ώστε $g \geq 0$ στο $\mathbb{R}^n$ και $g(x_0) > 0$ για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Τότε, για τη λύση που δίνεται από τον τύπο (4.5), ισχύει ότι

$$u(x,t) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0.$$

Επομένως, για οποιονδήποτε θετικό χρόνο t και οποιοδήποτε σημείο $x \in \mathbb{R}^n$, η θερμοκρασία στο σημείο x στον χρόνο t είναι γνησίως θετική! Το γεγονός αυτό έχει άμεση σύνδεση με την ισχυρή αρχή μεγίστου, και μας λέει ότι οι λύσεις της εξίσωσης της θερμότητας έχουν την ιδιότητα της *άπειρης ταχύτητας διάδοσης*.

4.4 Η μέθοδος χωρισμού μεταβλητών

Έστω $L > 0$, και έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0, & \text{στο } (0,L) \times (0,\infty) \\ u = g, & \text{στο } [0,L] \times \{0\} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & \text{για κάθε } t > 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Το πρόβλημα αυτο μοντελοποιεί την εξέλιξη της θερμότητας σε μία ράβδο, τα σημεία της οποίας αντιστοιχούν στα σημεία του διαστήματος $(0,L)$.

Μία ιδέα για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα, η οποία ανάγεται στον Fourier, είναι η εξής: θα αναζητήσουμε λύσεις της μορφής

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

δηλαδή οι μεταβλητές x, t να είναι χωρισμένες. Τότε, η u λύνει την εξίσωση $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$ αν και μόνο αν

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x)$$

και, αν τα $X(x), T(t) \neq 0$, θα πρέπει να έχουμε ότι

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Η συνάρτηση στο αριστερό μέλος εξαρτάται μόνο από το t, ενώ η συνάρτηση στο δεξί μέλος εξαρτάται μόνο από το x. Επομένως, οι δύο συναρτήσεις θα πρέπει να είναι ίσες με μία σταθερά: υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

άρα $T'(t) = \lambda T(t)$ και $X''(x) = \lambda X(x)$. Ή, διαφορετικά: αν αναζητούμε συναρτήσεις X, T που να μην είναι ταυτοτικά 0, υπάρχουν x_0, t_0 τέτοια ώστε $X(x_0) \neq 0$ και $T(t_0) \neq 0$. Τότε,

$$\frac{T'(t_0)}{T(t_0)} = \frac{X''(x_0)}{X(x_0)} = \lambda \in \mathbb{R},$$

οπότε η σχέση $T'(t)X(x) = T(t)X''(x)$ συνεπάγεται ότι

$$X''(x) = \frac{T'(t_0)}{T(t_0)} X(x) = \lambda X(x), \quad T'(t) = \frac{X''(x_0)}{X(x_0)} T(t) = \lambda T(t).$$

Επικεντρωνόμαστε αρχικά στην πρώτη εξίσωση, και βρίσκουμε τις λύσεις της, ζητώντας να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες $X(0) = X(L) = 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν μη μηδενικές λύσεις, μόνο στην περίπτωση όπου το λ είναι αρνητικό και συγκεκριμένης μορφής, με δύο τρόπους.

i) **1ος τρόπος:** Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις: $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ και $\lambda > 0$, και λύνουμε την εξίσωση σε κάθε περίπτωση.

Στην πρώτη περίπτωση, η γενική λύση της εξίσωσης $X'' = 0$ είναι η $X(x) = C_1 x + C_2$. Αυτή η λύση είναι είτε γνησιως αύξουσα, είτε γνησίως φθίνουσα, ή σταθερή, επομένως η $X(0) = X(L) = 0$ ικανοποιείται αν και μόνο αν $X \equiv 0$.

Στη δεύτερη περίπτωση, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της εξίσωσης είναι το $P(t) = t^2 - \lambda$, άρα η γενική λύση της εξίσωσης είναι η

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Θέτοντας $x = 0$, πρέπει να έχουμε ότι $C_1 + C_2 = 0$, άρα $C_2 = -C_1$ και $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} - C_1 e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Τότε,

$$X'(x) = C_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}x} + C_1\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}x} = C_1\sqrt{\lambda}\left(e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x}\right),$$

οπότε η X είναι είτε γνησίως αύξουσα, είτε γνησίως φθίνουσα, είτε η μηδενική. Έτσι, για να ικανοποιούνται οι συνθήκες $X(0) = X(1) = 0$ σε αυτή την περίπτωση, θα πρέπει ξανά $X \equiv 0$.

Τέλος, ερχόμαστε στην τρίτη περίπτωση. Αφού $\lambda < 0$ γράφουμε $\lambda = -\mu^2$ για κάποιο $\mu > 0$. Εδώ οι λύσεις του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι οι $\pm i\mu$, άρα η γενική λύση της εξίωσης είναι η

$$X(x) = C_1 \sin(\mu x) + C_2 \cos(\mu x).$$

Θέτοντας $x = 0$, θα πρέπει να έχουμε ότι $C_2 = 0$, άρα $X(x) = C_1 \sin(\mu x)$. Για να είναι η X όχι παντού ίση με το 0, θα πρέπει $C_1 \neq 0$. Επιπλέον, θα πρέπει $X(L) = 0$, άρα $C_1 \sin(\mu L) = 0$, επομένως

$$\sin(\mu L) = 0 \Rightarrow \mu = \frac{k\pi}{L}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Οι γενικές λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι για $k \in \mathbb{Z}$, αρά μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $k \in \mathbb{N}$, μιας και η sin είναι περιττή, και έχουμε ελευθερία στην επιλογή της σταθεράς $C_1 \in \mathbb{R}$. Έτσι,

$$\lambda = -\mu^2 = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$$

άρα $T'(t) = \lambda T(t)$, επομένως $T(t) = Ce^{\lambda t} = Ce^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$.

ii) **2ος τρόπος:** Θα δείξουμε ότι υπάρχουν μη μηδενικές λύσεις X μόνο αν το $\lambda < 0$. Για να το κάνουμε αυτό, ολοκληρώνουμε κατά μέρη, και υπολογίζουμε

$$\lambda \int_0^L X^2 = \int_0^L X''X = X'(L)X(L) - X'(0)X(0) - \int_0^L (X')^2 = -\int_0^L (X')^2,$$

αφού $X'' = \lambda X$ και $X(0) = X(L) = 0$. Επομένως,

$$\lambda = -\int_0^L (X')^2 \cdot \left(\int_0^L X^2\right)^{-1},$$

άρα $\lambda < 0$. Συνεχίζοντας όπως παραπάνω, βρίσκουμε ότι μόνο για τις τιμές $\lambda = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$, όπου $k \in \mathbb{N}$, έχουμε μη μηδενικές λύσεις X.

Έτσι, οδηγούμαστε στην εξής πρόταση.

Πρόταση 4.13. *Μία συνάρτηση της μορφής* $u(x,t) = X(x)T(t)$ *είναι λύση της εξίσωσης* $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$ *στο* $(0,L) \times (0,\infty)$ *με* $u(0,t) = u(L,t) = 0$ *για κάθε* $t > 0$*, αν και μόνο αν*

$$u(x,t) = c_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}, \tag{4.7}$$

όπου $k \in \mathbb{N}$ *και* $c_k \in \mathbb{R}$.

Αν και έχουμε βρει λύσεις της εξίσωσης της θερμότητας, δεν έχουμε λύσει το πρόβλημα (4.6), μιας και οι αρχικές τιμές των προηγούμενων λύσεων είναι ίσες με $c_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$. Η ιδέα τώρα είναι η εξής: θα προσθέσουμε τις προηγούμενες λύσεις για $k = 1, \dots n$, και θα οδηγηθούμε σε νέα λύση της εξίσωσης της θερμότητας, τη συνάρτηση

$$v_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t},$$

με αρχικές τιμές

$$v_n(x,0) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Έτσι, μεταφέρουμε το προβλημα στο εξής: δεδομένης συνάρτησης $g : [0,L] \to \mathbb{R}$ με $g(0) = g(L) = 0$, μπορούμε να γράψουμε την g στη μορφή

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right);$$

Η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα είναι αρνητική, αν το $n \in \mathbb{N}$. Έτσι, θα θεωρήσουμε τη σειρά των λύσεων στην (4.7) (για συγκριμένα $c_k \in \mathbb{R}$), και θα ζητήσουμε τη σχέση

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right). \tag{4.8}$$

4.5 Σειρές Fourier

Το κεντρικό πρόβλημα που δημιουργείται είναι το κατά πόσον ισχύει η αναπαράσταση (4.8), όπου ιδανικά θα θέλαμε η σειρά στο δεξί μέλος να συγκλίνει για κάθε $x \in [0,L]$ και η ισότητα να ισχύει κατά σημείο. Αυτό είναι και το κεντρικό ερώτημα των σειρών Fourier, όπου αντί της (4.8), ζητάμε την αναπαράσταση

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\right).$$

για $x \in [-L, L]$. Για να έχουμε πιο απλούς τύπους, θα θεωρήσουμε ότι $L = \pi$, οπότε θα θέλαμε να ισχύει η σχέση

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right). \tag{4.9}$$

για $x \in [-\pi, \pi]$. Τότε, αφού το δεξί μέλος ορίζει μία 2π περιοδική συνάρτηση (αν έχουμε σύγκλιση της σειράς για κάθε x), η προηγούμενη σχέση μπορεί να ισχύει μόνο όταν η g ικανοποιεί τη σχέση $g(-\pi) = g(\pi)$.

Η ιδέα για να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_k, b_k είναι η εξής: θα πολλαπλασιάσουμε την (4.9) με τις συναρτήσεις $\sin(nx)$ και $\cos(nx)$ για συγκεκριμένο $n \in \mathbb{N}$ και θα ολοκληρώσουμε κατά μέλη. Αν μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά με το ολοκλήρωμα, τότε θα χρησιμοποιήσουμε τους εξής τύπους.

Λήμμα 4.14. *Για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,dx = \pi\delta_{n,k},$$

και, για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx)\,dx = \pi\delta_{n,k},$$

όπου $\delta_{n,k} = 1$ αν $n = k$ και $\delta_{n,k} = 0$ αν $n \neq k$.

Απόδειξη. Αρχικά, αν $m \in \mathbb{Z}$, έχουμε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\,dx = 2\pi\delta_{m,0}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\,dx = 0.$$

Επιπλέον, από τους τύπους

$$\cos((n+k)x) = \cos(nx)\cos(kx) - \sin(nx)\sin(kx),$$
$$\cos((n-k)x) = \cos(nx)\cos(kx) + \sin(nx)\sin(kx),$$

θα έχουμε ότι

$$\cos(nx)\cos(kx) = \frac{1}{2}\left(\cos((n-k)x) + \cos((n+k)x)\right),$$

άρα

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{2}(2\pi\delta_{n-k,0} + 2\pi\delta_{n+k,0}) = \pi\delta_{n,k}$$

αφού $n, k \in \mathbb{N}$, επομένως $n + k \neq 0$. Ομοίως,

$$\sin(nx)\sin(kx) = \frac{1}{2}\left(\cos((n-k)x) - \cos((n+k)x)\right),$$

οπότε

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{2}(2\pi\delta_{n-k,0} - 2\pi\delta_{n+k,0}) = \pi\delta_{n,k}.$$

Τέλος, από τους τύπους

$$\sin((n+k)x) = \sin(nx)\cos(kx) + \cos(nx)\sin(kx),$$
$$\sin((n-k)x) = \sin(nx)\cos(kx) - \cos(nx)\sin(kx),$$

έχουμε ότι

$$\sin(nx)\cos(kx) = \frac{1}{2}\left(\sin((n+k)x) + \sin((n-k)x)\right),$$

επομένως

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx)\,dx = 0$$

για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$. □

Έστω τώρα $n \in \mathbb{N}$. Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (4.9) με $\cos(nx)$ και ολοκληρώνωντας, τοτε αν μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά με το ολοκλήρωμα, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))\right) \cos(nx)\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(nx)\,dx + \sum_{k=1}^{n} a_k \pi \delta_{n,k},\end{aligned}$$

επομένως

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\,dx.$$

Ομοίως,

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))\right) dx = \pi a_0,$$

επομένως

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx.$$

Ομοίως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θα πρέπει

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx.$$

Ορισμός 4.15. Έστω $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Η *σειρά Fourier* της g είναι (τυπικά) η σειρά

$$S_g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in [-\pi, \pi], \tag{4.10}$$

όπου, για $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $m \in \mathbb{N}$, οι *συντελεστές Fourier* της g δίνονται από τους τύπους

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\,dx, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(mx)\,dx.$$

Σε αυτό το σημείο ο ορισμός είναι τυπικός: δεν γνωρίζουμε εάν η σειρά συγκλίνει για κάποια x. Οπότε, τα κύρια ερωτήματα που δημιουργούνται είναι τα εξής:

i) Για ποια $x \in [-\pi, \pi]$ συγκλίνει η $S_g(x)$;

ii) Αν η $S_g(x)$ συγκλίνει για κάποιο $x \in [-\pi, \pi]$, τότε συγκλίνει στην $g(x)$;

Τα ερωτήματα αυτά μπορούν να απαντηθούν για συναρτήσεις που ικανοποιούν τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.16. Μία συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ είναι κατά τμήματα συνεχής, αν υπάρχουν $-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \pi$, τέτοια ώστε:

i) Η g είναι συνεχής στο (x_{k-1}, x_k) για κάθε $k = 1, \ldots n$.

ii) Τα όρια

$$\lim_{x\to -\pi^+} g(x), \quad \lim_{x\to \pi^-} g(x), \quad \lim_{x\to x_i^-} g(x), \quad \lim_{x\to x_i^+} g(x),$$

για $i = 1, \dots n-1$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 4.17. *Έστω $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία να ειναι παραγωγίσιμη στο $[-\pi, \pi]$, εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων. Αν οι g, g' είναι κατα τμήματα συνεχείς στο $[-\pi, \pi]$, τότε η $S_g(x)$ συγκλίνει για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$, και*

$$S_g(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{y\to x^-} g(y) + \lim_{y\to x^+} g(y)\right).$$

Παρατήρηση 4.18. Το σωστό πλαίσιο για το Θεώρημα 4.17 είναι η g να είναι μία 2π περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ (ή διαφορετικά, $g : S^1 \to \mathbb{R}$, όπου S^1 είναι ο μοναδιαίος κύκλος στο $\mathbb{R}^2$). Τότε, στα σημεία $-\pi, \pi$, ο μέσος όρος των πλευρικών ορίων θεωρείται μέσω της 2π περιοδικής επέκτασης, όπου θα πρέπει να ισχύει ότι

$$S_g(\pi) = S_g(-\pi) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to -\pi^+} g(x) + \lim_{x\to \pi^-} g(x)\right).$$

Επομένως, αν η g είναι συνεχής στο $[-\pi, \pi]$ και η g' είναι κατα τμήματα συνεχής, τότε η $S_g(x)$ συγκλίνει στο $g(x)$ για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$, και για τα άκρα $-\pi, \pi$ ισχύει ο παραπάνω τύπος.

Παράδειγμα 4.19. Έστω $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$. Θα βρούμε μία σειρά Fourier για την g, επεικτείνοντάς την με περιττό τρόπο στο $[-\pi, \pi]$. Θέτουμε δηλαδή

$$G(x) = -G(-x) \text{ για } x \in [-\pi, 0], \quad G(x) = g(x) \text{ για } x \in [0, \pi].$$

Τότε η $G : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ είναι περιττή. Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές Fourier $(a_n), (b_n)$: αρχικά, αφού η $G(x)$ είναι περιττή και η $\cos(nx)$ είναι άρτια για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, θα έχουμε ότι η $G(x)\cos(nx)$ είναι περιττή στο $[-\pi, \pi]$, άρα

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\cos(nx)\,dx = 0.$$

Άρα η G γράφεται ως σειρά ημιτόνων, και αφού η $G(x)\sin(nx)$ είναι άρτια για $n \in \mathbb{N}$, θα έχουμε ότι

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} G(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx. \tag{4.11}$$

Επομένως, αν οι g, g' είναι κατά τμήματα συνεχείς στο $[-\pi, \pi]$, θα έχουμε ότι

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),$$

όπου οι συντελεστές b_k δίνονται από την (4.11). Έτσι, οδηγούμαστε στην εξής αναπαράσταση.

Πρόταση 4.20. *Έστω $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $g(0) = g(\pi) = 0$, η οποία ειναι παραγωγίσιμη στο $[-\pi, \pi]$, εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων. Αν η g' είναι κατα τμήματα συνεχής στο $[0, \pi]$, τότε μία λύση του προβλήματος*

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0, & \text{στο } (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u = g, & \text{στο } [0, \pi] \times \{0\}, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & \text{για κάθε } t > 0. \end{cases}$$

δίνεται από τον τύπο

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)e^{-k^2 t},$$

όπου $b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx$ *για κάθε* $n\in\mathbb{N}$.

Αν η g είναι μία συνάρτηση όπως στην προηγούμενη πρόταση, τότε

$$|b_n|\le \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|g(x)||\sin(nx)|\,dx\le 2\|g\|_\infty.$$

Αν $\delta>0$ και $x\in\mathbb{R}$, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(x,t)\in[0,\pi]\times(\delta,\infty)$. Πράγματι,

$$|b_k\sin(kx)e^{-k^2 t}|\le 2\|g\|_\infty e^{-k^2 t}\le 2\|g\|_\infty e^{-k^2\delta}=M_k,$$

και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}M_k$ συγκλίνει. Επομένως, από το M- κριτήριο του Weierstrass, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,\pi]\times[\delta,\infty)$. Χρησιμοποιώντας θεωρήματα παραγώγισης για σειρές που συγκλίνουν ομοιόμορφα, μπορούμε να δείξουμε ότι η u είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)\times(0,\infty)$. Επιπλέον, $u\in C([0,\pi]\times[0,\infty))$, άρα από το θεώρημα μοναδικότητας λύσεων προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών (Θεώρημα 4.5), θα έχουμε ότι η προηγούμενη u είναι **η** λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Παρατήρηση 4.21. Στην περίπτωση που η g είναι τμηματικά συνεχής, αλλά δεν είναι συνεχής, ή δεν ικανοποιεί την $g(0)=g(\pi)=0$, τότε οι αρχικές τιμές της προηγούμενης u δίνονται από τη σχέση

$$u(x,0)=\frac{1}{2}\left(\lim_{y\to x^-}g(y)+\lim_{y\to x^+}g(y)\right)\ \text{για}\ x\neq 0,\pi,\quad u(0,0)=u(\pi,0)=0.$$

Αφού ομως η g είναι τμηματικά συνεχής, θα ισχύει ότι $u(x,0)=g(x)$ για κάθε $x\in[0,\pi]$, εκτός ίσως από πεπερασμένα σημεία. Έτσι, θεωρούμε ότι και σε αυτή την περίπτωση η u είναι λύση του προβλήματος της Πρότασης 4.20.

Παράδειγμα 4.22. Θα βρούμε τη σειρά Fourier της συνάρτησης $g(x)=|x|$, $x\in[-\pi,\pi]$. Η g είναι άρτια, άρα

$$|x|=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(kx),$$

όπου $a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}g(x)\cos(nx)\,dx$ για κάθε $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Οπότε,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi,$$

και, για $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}x(\sin(nx))'\,dx=-\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\\&=\frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi}(\cos(nx))'\,dx=\frac{2\cos(n\pi)-2\cos(0)}{\pi n^2}=\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}.\end{aligned}$$

Άρα $a_n = 0$ αν ο n είναι άρτιος, και $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$, αν ο n είναι περιττός. Από το Θεώρημα 4.17, θα έχουμε ότι

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ περιττός}}}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} \cos(nx) \tag{4.12}$$

για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.

Παράδειγμα 4.23. Αν $x \in [0, \pi]$, η σχέση (4.12) μας λέει ότι

$$x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nx)$$

Αυτό είναι το ανάπτυγμα της συνάρτησης $g(x) = x$ στο $[0, \pi]$ σε *σειρά συνημιτόνων*. Μπορούμε επίσης να αναπτύξουμε την ίδια συνάρτηση σε σειρά ημιτόνων στο $(0, \pi)$, ως εξής: θεωρούμε την περιττή επέκταση της συνάρτησης στο $(-\pi, \pi)$, θέτοντας

$$g(x) = x, \ \ x \in [-\pi, \pi].$$

Τότε,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),$$

για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$, όπου $b_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} g(x) \sin(nx)\, dx$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx = -\frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} x(\cos(nx))'\, dx \\ &= -\frac{2}{n} \cos(n\pi) + \int_0^{\pi} \cos(nx)\, dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \end{aligned}$$

επομένως

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx), \quad x \in (-\pi, \pi). \tag{4.13}$$

Η προηγούμενη ισότητα ισχύει στα σημεία του $(-\pi, \pi)$ στα οποία η $g(x) = x$ είναι συνεχής, δηλαδή για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$. Στο άκρο $x = \pi$, το δεξί μέλος είναι ίσο με 0, και

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \to -\pi^+} g(x) + \lim_{x \to \pi^-} g(x) \right) = 0,$$

οπότε το Θεώρημα 4.17 ισχύει και σε αυτήν την περίπτωση.

Παράδειγμα 4.24. Θα βρούμε τη σειρά Fourier της συνάρτησης $g(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$. Η g είναι άρτια, άρα

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx),$$

όπου $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi g(x)\cos(nx)\,dx$ για κάθε $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Οπότε,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{2\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3},$$

και, για $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi x^2(\sin(nx))'\,dx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi 2x\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi x(\cos(nx))'\,dx = \frac{4\pi\cos(n\pi)}{\pi n^2} - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 4.17, αφού η $g(x) = x^2$ είναι συνεχής στο $[-\pi,\pi]$ (με την έννοια της 2π περιοδικής επέκτασης), θα έχουμε ότι

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^\infty \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx) \tag{4.14}$$

για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$.

Μία σημαντική εφαρμογή της τελευταίας ισότητας είναι η εξής: θέτοντας $x = \pi$, θα έχουμε ότι

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^\infty \frac{4(-1)^n}{n^2}(-1)^n,$$

άρα

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Παράδειγμα 4.25. Για να βρούμε τη σειρά Fourier ημιτόνων της x^2 στο $(0,\pi)$, θεωρούμε την περιττή επέκταση της x^2 στο $(-\pi,\pi)$. Θεωρούμε δηλαδή τη συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in (-\pi,0) \\ x^2, & x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Τότε, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin(nx)\,dx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi x^2(\cos(nx))'\,dx = -\frac{2}{\pi n}\pi^2\cos(n\pi) + \frac{4}{\pi n}\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi x(\sin(nx))'\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}\pi}{n} - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{4}{\pi n^3}\cos(nx) - \frac{4}{\pi n^3} = \frac{2(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{4(-1)^n}{\pi n^3} - \frac{4}{\pi n^3}. \end{aligned}$$

Επομένως, για $x \in [0,\pi)$,

$$x^2 = g(x) = \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{2(-1)^{k+1}\pi}{k} + \frac{4(-1)^k}{\pi k^3} - \frac{4}{\pi k^3}\right)\sin(kx). \tag{4.15}$$

Παράδειγμα 4.26. Η συνάρτηση $g(x) = \sin(2x)$ για $x \in [0, \pi]$ γράφεται ως σειρά ημιτόνων στο $[0, \pi]$, με

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),$$

όπου $b_2 = 1$ και $b_k = 0$ για $k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$. Για να την γράψουμε ως σειρά συνημιτόνων, θεωρούμε την άρτια επέκτασή της, δηλαδή θέτουμε $h(y) = -\sin(2y)$ για $y \in [-\pi, 0]$, και $h(y) = \sin(2y)$ για $y \in (0, \pi]$. Τότε, για $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2x) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin((n+2)x)\, dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin((n-2)x)\, dx.$$

Αν $n = 2$, έχουμε ότι

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(4x)\, dx = -\frac{1}{4\pi} \cos(4x)\Big|_0^{\pi} = 0,$$

και αν $n \neq 2$, τότε

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{(n+2)\pi} \cos((n+2)x)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{(n-2)\pi} \cos((n-2)x)\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1-(-1)^{n+2}}{(n+2)\pi} - \frac{1-(-1)^{n-2}}{(n-2)\pi}. \end{aligned}$$

Άρα $a_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ άρτιο, και αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττός, τότε

$$a_n = -\frac{2}{(n+2)\pi} + \frac{2}{(n-2)\pi} = -\frac{8}{(n^2-4)\pi}.$$

Επομένως, για $x \in [0, \pi]$,

$$\sin(2x) = -\sum_{\substack{n=1,\\ n \text{ περιττός}}}^{\infty} \frac{8}{(n^2-4)\pi} \cos(nx). \tag{4.16}$$

4.6 Η μέθοδος χωρισμού μεταβλητών, μέρος 2ο

Θα δούμε μερικά παραδείγματα λύσης προβλημάτων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών.

Παράδειγμα 4.27. Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0, & \text{στο } (0,1) \times (0,\infty) \\ u(x,0) = \sin(\pi x), & \text{για } x \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \text{για κάθε } t \geq 0. \end{cases}$$

Αναζητώντας λύσεις της μορφής $u(x,t) = X(x)T(t)$ με $X(0) = X(1) = 0$, καταλήγουμε στις σχέσεις

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad T'(t) = \lambda T(t),$$

από όπου βρίσκουμε ότι $\lambda = -\mu^2$ για $\mu > 0$, οπότε $\sin(\mu) = 0$, και $\mu = k\pi$. Επομένως, οι συναρτήσεις

$$\sin(k\pi x) e^{-k^2\pi^2 t}$$

είναι λύσεις της εξίσωσης. Στην περίπτωση που $k = 1$, παρατηρούμε ότι η $\sin(\pi x)e^{-\pi^2 t}$ είναι η λύση του προβλήματος.

Διαφορετικά, μπορούμε να μεταφέρουμε το πρόβλημα στο $[0, \pi] \times [0, \infty)$, θέτοντας

$$v(x,t) = u\left(\frac{x}{\pi}, \frac{t}{\pi^2}\right),$$

για $x \in [0, \pi]$ και $t \geq 0$. Τότε,

$$\partial_t v = \frac{1}{\pi^2}\partial_t u, \quad \partial_x v = \frac{1}{\pi}\partial_x u, \ \partial_{xx} v = \frac{1}{\pi^2}\partial_{xx} u,$$

επομένως η v είναι λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_{xx} v = 0, & \text{στο } (0,\pi) \times (0,\infty) \\ v(x,0) = u(x/\pi, 0) = \sin x, & \text{για } x \in [0,\pi] \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0, & \text{για κάθε } t \geq 0. \end{cases}$$

Από τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών, οι συναρτήσεις $\sin(kx)e^{-k^2 t}$ είναι λύσεις του προηγούμενου προβλήματος, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα, η λύση v που αναζητούμε είναι η $v(x,t) = \sin x \cdot e^{-t}$, άρα

$$u(x,t) = v(\pi x, \pi^2 t) = \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t^2}.$$

Παράδειγμα 4.28. Επεκτείνουμε την προηγούμενη μέθοδο σε συνοριακές τιμές που δεν είναι απαραίτητα ίσες με 0. Έτσι, έστω $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$, $g : [0, L] \to \mathbb{R}$ με $g(0) = T_1$, $g(\pi) = T_2$, και έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0, & \text{στο } (0,L) \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x), & \text{για } x \in [0,L] \\ u(0,t) = T_1, \ u(L,t) = T_2, & \text{για κάθε } t \geq 0. \end{cases}$$

Αναζητούμε αρχικά μία συνάρτηση $h(x)$ η οποία να ικανοποιεί τις σχέσεις $h'' = 0$ στο $(0, L)$, $h(0) = T_1$ και $h(L) = T_2$. Η συνάρτηση αυτή είναι η

$$h(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_2}{L}x.$$

Αν u είναι μία λύση του παραπάνω προβλήματος, τότε η συνάρτηση $w = u - h$ λύνει το πρόβλημα

$$\begin{cases} \partial_t w - \partial_{xx} w = 0, & \text{στο } (0,L) \times (0,\infty) \\ w(x) = g(x) - h(x), & \text{για } x \in [0,L] \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, & \text{για κάθε } t \geq 0. \end{cases}$$

Τότε, η λύση του προηγούμενου προβλήματος βρίσκεται με τη μέθοδο των σειρών Fourier.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0, & \text{στο } (0,1) \times (0,\infty) \\ u(x,0) = x^2, & \text{για } x \in [0,1] \\ u(0,t) = 0, \ u(1,t) = 1, & \text{για κάθε } t \geq 0. \end{cases} \tag{4.17}$$

Εδώ θα αφαιρέσουμε από τη u μία συνάρτηση h με $h''=0$ στο $(0,1)$, $h(0)=0$ και $h(1)=1$. Η συνάρτηση αυτή είναι η $h(x)=x$, και αν u είναι μία λύση του παραπάνω προβλήματος, τότε η συνάρτηση $w=u-h$ λύνει το πρόβλημα

$$\begin{cases} \partial_t w - \partial_{xx} w = 0, & \text{στο } (0,1)\times(0,\infty) \\ w(x,0) = x^2 - x, & \text{για } x\in[0,1] \\ w(0,t)=0,\ w(1,t)=0, & \text{για κάθε } t\geq 0. \end{cases}$$

Μεταφέρουμε το πρόβλημα στο χωρίο $[0,\pi]\times(0,\infty)$, όπου εκεί έχουμε διαθέσιμους τύπους: θέτοντας $\tilde{w}(x,t)=w(x/\pi,t/\pi^2)$ για $x\in[0,\pi]$ και $t\geq 0$, υπολογίζουμε

$$\partial_{xx}\tilde{w}(x,t)=\pi^{-2}\partial_{xx}w(x/\pi,t/\pi^2),\quad \partial_t\tilde{w}(x,t)=\pi^{-2}\partial_t w(x/\pi,t/\pi^2),$$

οπότε η $\tilde{w}$ λύνει την εξίσωση $\partial_t\tilde{w}-\partial_{xx}\tilde{w}=0$ στο $(0,\pi)\times(0,\infty)$. Επομένως, ψάχνουμε για τη λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{w} - \partial_{xx} \tilde{w} = 0, & \text{στο } (0,\pi)\times(0,\infty) \\ w(x,0) = x^2/\pi^2 - x/\pi, & \text{για } x\in[0,\pi] \\ w(0,t)=0,\ w(\pi,t)=0, & \text{για κάθε } t\geq 0. \end{cases}$$

Από τις σχέσεις (4.13) και (4.15), έχουμε ότι, για $x\in(0,\pi)$,

$$\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{x}{\pi}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^k}{\pi^3k^3}-\frac{4}{\pi^3k^3}\right)\sin(kx)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi^3(2n-1)^3}\sin((2n-1)x).$$

Η προηγούμενη σχέση ισχύει επίσης και για $x=0$ και $x=\pi$. Επομένως, θα έχουμε ότι

$$\tilde{w}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi^3(2n-1)^3}\sin((2n-1)x)e^{-(2n-1)^2t},$$

για $x\in[0,\pi]$ και $t>0$. Αφού τώρα $\tilde{w}(x,t)=w(x/\pi,t/\pi^2)$, έχουμε ότι

$$w(x,t)=\tilde{w}(\pi x,\pi^2t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi^3(2n-1)^3}\sin((2n-1)\pi x)e^{-(2n-1)^2\pi^2t}.$$

Τέλος, αφού $u=w+h$, η λύση του προβλήματος (4.17) είναι η

$$u(x,t)=x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi^3(2n-1)^3}\sin((2n-1)\pi x)e^{-(2n-1)^2\pi^2t},$$

για $x\in[0,1]$ και $t\geq 0$.

Παράδειγμα 4.29. Μελετάμε ένα διαφορετικό πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών, όπου θεωρούμε ότι τα άκρα της ράβδου $[0,\pi]$ είναι μονωμένα. Τότε, δεν υπάρχει μεταφορά θερμότητας στην κατεύθυνση του x, οπότε ζητάμε τις *συνοριακές συνθήκες Neumann*

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0, & \text{στο } (0,\pi)\times(0,\infty) \\ u(x,0) = 2x - \sin(2x), & \text{για } x\in[0,\pi] \\ \partial_x u(0,t)=0,\ \partial_x u(\pi,t)=0, & \text{για κάθε } t\geq 0. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος των αρχικών τιμών είναι ίση με $g'(x)=2-2\cos(2x)$, οπότε $g'(0)=g'(1)=0$.

Με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών, αναζητούμε λύσεις της μορφής $u(x,t) = X(x)T(t)$, όπου για τη συνοριακή συνθήκη, θα ζητήσουμε $X'(0) = X'(\pi) = 0$. Όπως και στην Ενότητα 4.4, η u είναι λυση της εξίσωσης της θερμότητας, αν και μόνο αν $X'' = \lambda X$ και $T' = \lambda T$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, και μπορούμε να δείξουμε ότι $\lambda < 0$ ως εξής: πολλαπλασιάζουμε τη σχέση $X'' = \lambda X$ με X, και ολοκληρώνουμε στο $[0,\pi]$. Τότε,

$$\lambda \int_0^\pi X^2 = \int_0^\pi X''X = X'X\big|_0^\pi - \int_0^\pi (X')^2 = -\int_0^\pi (X')^2,$$

αφού $X'(0) = X'(\pi) = 0$. Επομένως $\lambda \leq 0$, οπότε $\lambda = -\mu^2$ για κάποιο $\mu \geq 0$. Αν $\mu = 0$, τότε η X είναι σταθερή. Αν τώρα $\mu > 0$, οι λύσεις της $X'' + \mu^2 X = 0$ είναι οι

$$X(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x).$$

Τότε $X'(x) = -\mu c_1 \sin(\mu x) + \mu c_2 \cos(\mu x)$. Αφού $X'(0) = 0$, θα έχουμε ότι $c_2 = 0$, οπότε $X'(x) = -\mu c_1 \sin(\mu x)$, και η σχέση $X'(\pi)$ συνεπάγεται ότι $\mu = k$ για $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως, οι συναρτήσεις

$$\cos(kx)e^{-k^2 t}$$

είναι λύσεις της εξίσωσης της θερμότητας στο $(0,1)\times(0,\infty)$, με συνοριακές συνθήκες Neumann ταυτοτικά ίσες με 0, για κάθε $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Θεωρούμε τώρα τη σειρά των προηγούμενων συναρτήσεων, και αναζητούμε λύση της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\pi x)e^{-n^2\pi^2 t},$$

όπου $c_n \in \mathbb{R}$. Επομένως, για $t = 0$, θέλουμε να ισχύει η σχέση

$$2\pi x - \sin(2\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\pi x),$$

για $x \in [0,1]$, ή αλλιώς

$$2y - \sin(2y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(ny),$$

για $y \in [0,\pi]$.

Η συνάρτηση y για $y \in [0,\pi]$ έχει αναπτυχθεί σε σειρά συνημιτόνων στη σχέση (4.12), και η $\sin(2y)$ στη σχέση (4.16). Οπότε,

$$\begin{aligned}
2y - \sin(2y) &= \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n-1)^2}\cos((2n-1)y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{((2n-1)^2-4)\pi}\cos((2n-1)y) \\
&= \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{(2n-1)^2((2n-1)^2-4)\pi}\cos((2n-1)y),
\end{aligned}$$

για κάθε $y \in [0,\pi)$. Βλέπουμε επισης ότι η σχέση αυτή ικανοποιείται για κάθε $y \in [0,\pi]$, οπότε, αν $y = \pi x$,

$$2\pi x - \sin(2\pi x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{(2n-1)^2((2n-1)^2-4)\pi}\cos((2n-1)\pi x),$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Επομένως, η λύση του προβλήματος είναι η

$$u(x,t) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{(2n-1)^2((2n-1)^2-4)\pi}\cos((2n-1)\pi x)e^{-(2n-1)^2\pi^2 t}.$$

4.7 Προβλήματα

1. Να αποδειχθεί ότι για καθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \neq 0$,

$$\lim_{t \to 0^+} \Phi(x,t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = 0.$$

2. i) Έστω $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λεία και κυρτή συνάρτηση. Αν η $u : \Omega \times (0,T] \to \mathbb{R}$ είναι λύση της εξίσωσης της θερμότητας, να αποδειχθεί ότι η $\phi(u)$ είναι υπολύση της εξίσωσης της θερμότητας.

   ii) Έστω $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λεία, αύξουσα και κυρτή συνάρτηση. Αν η $u : \Omega \times (0,T] \to \mathbb{R}$ είναι υπολύση της εξίσωσης της θερμότητας, να αποδειχθεί ότι η $\phi(u)$ είναι υπολύση της εξίσωσης της θερμότητας.

3. i) Έστω $u : \Omega \times (0,T] \to \mathbb{R}$ μία υπερλύση της εξίσωσης της θερμότητας, με $u > 0$ στο $\Omega \times (0,T] \to \mathbb{R}$. Να αποδειχεί ότι η u^{-1} είναι υπολύση της εξίσωσης της θερμότητας.

   ii) Να βρεθεί μία θετική υπολύση της εξίσωσης της θερμότητας στο χωρίο $[0,1] \times (0,\infty)$, τέτοια ώστε η u^{-1} να μην είναι υπερλύση.

4. Έστω $v : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, και $u(x,t) = v(x^2/t)$, όπου $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

   i) Να αποδειχθεί ότι $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$ αν και μόνο αν η v είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$4sv''(s) + (2+s)v'(s) = 0.$$

   ii) Να βρεθεί η γενική λύση της προηγούμενης εξίσωσης.

   iii) Παραγωγίστε τη λύση ως προς x, και επιλέξτε τις σταθερές κατάλληλα, ούτως ώστε να βρείτε τη θεμελιώδη λύση Φ για $n = 1$.

5. Έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ μία λύση της εξίσωσης της θερμότητας.

   i) Να αποδειχθεί ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $u_\lambda(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ είναι λύση της εξίσωσης της θερμότητας στο $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

   ii) Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ιδιότητα, δείξτε ότι η $v(x,t) = x\nabla u(x,t) + 2t\partial_t u(x,t)$ είναι επίσης λύση της εξίσωσης της θερμότητας στο $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

6. Έστω $g : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ μία συνεχής και φραγμένη συνάρτηση, με $\int_{\mathbb{R}} g < \infty$. Έστω επίσης $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ η μοναδική φραγμένη λύση του προβλήματος του Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g, & \text{στο } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases}$$

   i) Να αποδειχθεί ότι, για κάθε $t \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

   ii) Να αποδειχθεί ότι $u(x,t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$, ομοιόμορφα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7. Έστω $c \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ένας τύπος για μία λύση της εξίσωσης

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + cu = 0, & \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g, & \text{στο } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases} \tag{4.18}$$

(Υπόδειξη: θεωρήστε την $v(x,t) = e^{ct}u(x,t)$).

8. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ομαλό χωριο, και $u : \overline{\Omega} \times [0,\infty)$ μία λεία λύση της εξίσωσης

$$\partial_t u - \Delta u + gu = 0,$$

με $u(x,t) = 0$ για κάθε $x \in \partial\Omega$, όπου η g είναι μία μη αρνητική συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε την ενέργεια της u μέσω της σχέσης

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,t)\,dx.$$

Να αποδειχθεί ότι η E είναι φθίνουσα συνάρτηση του t.

9. Να αναπτυχθεί η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x, & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

σε σειρά ημιτόνων στο $[0,\pi]$. Αν S_n τα μερικά αθροίσματα αυτής της σειράς, να υπολογιστούν τα όρια

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

10. Να βρεθεί η λύση στο πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0, & \text{στο } (0,1) \times (0,\infty) \\ u(x,0) = x^3 - x, & \text{για } x \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \text{για κάθε } t \ge 0. \end{cases}$$

11. Να βρεθεί μία λύση στο πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0, & \text{στο } (0,\pi) \times (0,\infty) \\ u(x,0) = x, & \text{για } x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & \text{για κάθε } t \ge 0. \end{cases}$$

Είναι η λύση συνεχής στο $[0,\pi] \times [0,\infty)$;

12. Να βρεθεί μία λύση στο πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0, & \text{στο } (0,\pi) \times (0,\infty) \\ u(x,0) = 1, & \text{για } x \in (0,\pi/2], \\ u(x,0) = -1, & \text{για } x \in (\pi/2,\pi), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & \text{για κάθε } t \ge 0, \end{cases}$$

και να υπολογιστεί η τιμή της λύσης στο $(\pi/2, 0)$.

13. Να βρεθεί μία λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0, & \text{στο } (-\pi, \pi) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = e^{|x|}, & \text{για } x \in (-\pi, \pi), \\ \partial_x u(-\pi, t) = \partial_x u(\pi, t) = 0, & \text{για κάθε } t \geq 0. \end{cases}$$

14. Να βρεθούν όλες οι λύσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \partial_t u - t\partial_{xx} u = 0, & \text{στο } (0, 1) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \text{για κάθε } t \geq 0, \end{cases}$$

οι οποίες είναι της μορφής $u(x, t) = X(x)T(t)$, όπου $X : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και $T : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

15. Έστω $\Omega = (0, \pi)^2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

   i) Να βρεθούν όλες οι λύσεις του προβλήματος

$$\begin{cases} -\Delta v(x, y) = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ v(0, y) = v(\pi, y) = 0, & 0 \leq y \leq \pi, \end{cases}$$

   οι οποίες είναι της μορφής $v(x, y) = X(x)Y(y)$, όπου $(x, y) \in \overline{\Omega}$.

   ii) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & 0 \leq y \leq \pi, \\ u(x, 0) = 0, u(x, \pi) = 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

   iii) Για την προηγούμενη συνάρτηση u, να υπολογιστεί η τιμή $u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

16. Έστω $\Omega = (0, \pi)^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Να βρεθούν όλες οι λύσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, y, t) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega, t \geq 0, \end{cases}$$

οι οποίες είναι της μορφής $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$, όπου $0 \leq x, y \leq \pi$ και $t \geq 0$.

17. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ομαλό, $T > 0$, και $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ λύση του προβλήματος του Neumann

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & (x, t) \in \Omega_T, \\ \partial_{\nu(x)} u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ 0 < t \leq T. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $m(t) = \displaystyle\int_\Omega u(x, t)\, dx$ είναι σταθερή.

4.8 Επιπλέον προβλήματα*

1. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο χωρίο, και $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ μία υφαρμονική συνάρτηση.

   i) Θέτουμε $u(x, t) = e^{at}(u + b|x|^2)$, όπου $a, b > 0$. Βρείτε ποια σχέση μεταξύ των a, b συνεπάγεται ότι η u είναι υπολύση της εξίσωσης της θερμότητας στο χωρίο $\Omega \times \mathbb{R}$.

ii) Επιλέγοντας τα a, b κατάλληλα, συμπεράνετε την αρχή μεγίστου για την υφαρμονική συνάρτηση u από την αρχή μεγίστου για υπολύσεις της εξίσωσης της θερμότητας.

2. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο χωρίο. Υποθέτουμε ότι $u \in C(\overline{\Omega_T}) \cap C_1^2(\Omega \times (0,T))$ είναι υπολύση της εξίσωσης της θερμότητας στο $\Omega \times (0,T)$ (δηλαδή, δεν υποθέτουμε ότι οι παράγωγοι της u επεκτείνονται και στο $\Omega \times \{t = T\}$). Να αποδειχθεί ότι ισχύει η αρχή μεγίστου για τη u:

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\partial_p \Omega_T} u.$$

3. Δείξτε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοια ώστε, αν $g(r) = e^{-br^2} - e^{-b}$ και $v(x,t) = t^{-a} g(|x|/\sqrt{t})$, τότε η u ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

i) Αν $t > 0$, τότε $v(x,t) \geq 0$ όταν $|x| \leq \sqrt{t}$, και $v(x,t) < 0$ όταν $|x| > \sqrt{t}$.

ii) $v(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.

iii) $\partial_t v - \Delta v < 0$ στο $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.

4. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο, $T > 0$, $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ με $\partial_t u - \Delta u \leq 0$ στο Ω_T, και $u(x,t) \leq 0$ για κάθε $(x,t) \in \partial\Omega_T$.

i) Να αποδειχθεί ότι $u(x,t) \leq 0$ για κάθε $(x,t) \in \overline{\Omega_T}$.

ii) Έστω ότι $u(x,t) < 0$ για κάποιο $(x,t) \in \Omega_T$. Χρησιμοποιώντας την υπολύση v της προηγούμενης άσκησης, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε, αν $|y - x| < r$ και $t < s < t + r^2$, τότε $u(y,s) < 0$.

iii) Έστω ότι $u(x,T) = 0$ για κάποιο $x \in \Omega$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε, αν $|x - y| < r$ και $T - r^2 < s < T - |x-y|^2$, τότε $u(y,s) = 0$.

iv) Να αποδειχθεί η ισχυρή αρχή μεγίστου: αν $u(x,T) = 0$ για κάποιο $x \in \Omega$, τότε $u(y,t) = 0$ για κάθε $y \in \Omega$ και για κάθε $t \in [0,T)$ (*υπόδειξη:* Θεώρημα 4, σελίδα 54 στον Evans).

5. Έστω $B_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ η μοναδιαία μπάλα, και $u : B_1 \to \mathbb{R}$ με $u \in C^2(B_1 \setminus \{0\})$.

i) Θεωρούμε την u ως προς πολικές συντεταγμένες, θέτοντας

$$\tilde{u}(r,\phi) = u(r\cos\phi, r, \sin\phi),$$

όπου $0 < r < 1$ και $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Να αποδειχθεί ότι

$$\Delta u = \partial_{rr}\tilde{u} + \frac{1}{r}\partial_r \tilde{u} + \frac{1}{r^2}\partial_{\phi\phi}\tilde{u}.$$

ii) Έστω ότι η u είναι αρμονική στην B_1, και είναι της μορφής $u(x,y) = R(r)\Phi(\phi)$, σε πολικές συντεταγμένες. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\Phi'' = \lambda\Phi$, και η R ικανοποιεί την εξίσωση του Euler

$$r^2 R'' + rR' + \lambda R = 0.$$

iii) Να βρεθούν οι πιθανές τιμές του λ, να λυθούν οι προηγούμενες εξισώσεις, και να εκφραστεί η γενική λύση της $\Delta u = 0$ στην B_1 σε μορφή σειράς.

5 Η κυματική εξίσωση

5.1 Εισαγωγή

Η κυματική εξίσωση είναι η μερική διαφορική εξίσωση

$$\partial_{tt}u - \Delta u = 0.$$

Η γενικότερη εξίσωση $\partial_{tt}u - \Delta u = f$ ονομάζεται *μη ομογενής* κυματική εξίσωση. Όπως και στην εξίσωση της θερμότητας, η Λαπλασιανή θεωρείται ως προς τις μεταβλητές x. Θα θεωρήσουμε ότι $x \in \Omega$, όπου $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, και $t \in (0, T]$, δηλαδή $(x, t) \in \Omega_T$.

Ένας άλλος συμβολισμός για τον τελεστή της κυματικής εξίσωσης είναι ο

$$\Box = \partial_{tt} - \Delta.$$

Για να μπορούμε να εφαρμόσουμε τον προηγούμενο τελεστή στη συνάρτηση u, απαιτούμε η u να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως προς όλες τις μεταβλητές στο $\Omega \times (0, T]$ (οπότε, και στην κορυφή $\Omega \times \{t = T\}$). Δηλαδή, θα ζητάμε

$$u \in C^2(\Omega_T).$$

Στην περίπτωση της εξίσωσης της θερμότητας, στα προβλήματα που περιλαμβάνουν αρχικές συνθήκες ζητάμε να ισχύει η σχέση $u(x, 0) = g(x)$ για $x \in \Omega$, όπου η $g : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μία δοσμένη συνάρτηση. Στην περίπτωση της κυματικης εξίσωσης, το πλαίσιο είναι ανάλογο με τη (συνήθη) διαφορική εξίσωση

$$v''(t) = 0,$$

όπου αναζητούμε λύση για $t \geq 0$. Η γενική λύση της εξίσωσης αυτής είναι η $v(t) = At + B$, όπου $A, B \in \mathbb{R}$, και για να καθοριστεί με μοναδικό τρόπο, θα πρέπει να γνωρίζουμε την τιμή $B = v(0)$ και την τιμή $A = v'(0)$. Οπότε, στο πρόβλημα αρχικών τιμών για την κυματική εξίσωση, για να καθορίσουμε τη λύση με μοναδικό τρόπο, εκτός από τις αρχικές τιμές $u(x, 0) = g(x)$, θα πρέπει να μας δίνονται και οι αρχικές τιμές της μερικής παραγώγου $\partial_t u(x, 0) = h(x)$.

Εν γένει, οι συναρτήσεις g, h είναι διαφορετικές, και δεν σχετίζονται μεταξύ τους. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $u(x, t) = t$ ικανοποιεί την $u(x, 0) = g(x)$ και $\partial_t u(x, 0) = h(x)$ για $g(x) \equiv 0$ και $h(x) \equiv 1$ στο Ω.

Τέλος, αντίστοιχα με την εξίσωση της θερμότητας, οι αρχικές συνθήκες δεν αρκούν για να καθορίσουν μοναδικές λύσεις, οπότε ενδιαφερόμαστε για προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών.

5.2 Μοναδικότητα, περιοχές εξάρτησης

Σε αντίθεση με την εξίσωση του Laplace και την εξίσωση της θερμότητας, οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης δεν ικανοποιούν την αρχή μεγίστου, όπως θα δούμε παρακάτω. Έτσι, για να δείξουμε μοναδικότητα λύσεων, χρειζόμαστε μία διαφορετική ιδέα, η οποία είναι η *μέθοδος της ενέργειας*.

Έτσι, αν έχουμε μία λύση u της κυματικής εξίσωσης

$$\partial_{tt}u - \Delta u = 0,$$

όπου $(x, t) \in \Omega_T$, ορίζουμε την ενέργεια της u μέσω της σχέσης

$$E_u(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|\partial_t u(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2 \right) \, dx,$$

για $t \in [0, T]$.

Λήμμα 5.1. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ομαλό χωρίο, και $u \in C^1(\overline{\Omega_T}) \cap C^2(\Omega_T)$ μία λύση της κυματικής εξίσωσης $\partial_{tt}u - \Delta u = 0$ στο Ω_T, με $u \equiv 0$ στο κάθετο σύνορο $\partial\Omega \times [0, T]$. Τότε, ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας: η ενέργεια E_u της u είναι σταθερή συνάρτηση του t στο $[0, T]$.*

Απόδειξη. Παραγωγίζουμε την E_u ως προς t, και έχουμε ότι

$$E_u'(t) = \int_\Omega \left(\partial_t u(x,t)\partial_{tt}u(x,t) + \nabla u(x,t)\nabla\partial_t u(x,t)\right)\, dx. \tag{5.1}$$

Για τον δεύτερο όρο, υπολογίζουμε

$$\operatorname{div}(\partial_t u \cdot \nabla u) = \partial_t u \cdot \operatorname{div}(\nabla u) + \nabla\partial_t u \nabla u = \partial_t u \Delta u + \nabla\partial_t u \nabla u,$$

επομένως, σταθεροποιώντας t, ολοκληρώνοντας στο Ω και χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης,

$$\int_\Omega \nabla u(x,t)\nabla\partial_t u(x,t)\, dx = \int_{\partial\Omega} \partial_t u(x',t) \cdot \partial_\nu u(x',t)\, d\sigma(x') - \int_\Omega \partial_t u(x,t)\Delta u(x,t)\, dx.$$

Η u μηδενίζεται ταυτοτικά στο $\partial\Omega \times [0, T]$, επομένως $\partial_t u = 0$ στο $\partial\Omega \times [0, T]$. Άρα

$$\int_\Omega \nabla u(x,t)\nabla\partial_t u(x,t)\, dx = -\int_\Omega \partial_t u(x,t)\Delta u(x,t)\, dx$$

και αντικαθιστώντας στην (5.1), έχουμε ότι

$$E_u'(t) = \int_\Omega \partial_t u(x,t)\left(\partial_{tt}u(x,t) - \Delta u(x,t)\right)\, dx.$$

Αφού η u λύνει την κυματική εξίσωση, έχουμε ότι $E_u' = 0$, οπότε η E_u είναι σταθερή στο $[0, T]$. □

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα, οδηγούμαστε σε μοναδικότητα λύσεων προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών.

Πρόταση 5.2. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ομαλό χωρίο, $f \in C(\Omega_T)$, $g \in C^2(\partial_p\Omega_T)$, και $h \in C^1(\overline{\Omega} \times \{0\})$. Τότε, το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών*

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta u = f, & \text{στο } \Omega_T, \\ u = g, & \text{στο } \partial_p\Omega_T, \\ \partial_t u = h, & \text{στο } \Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

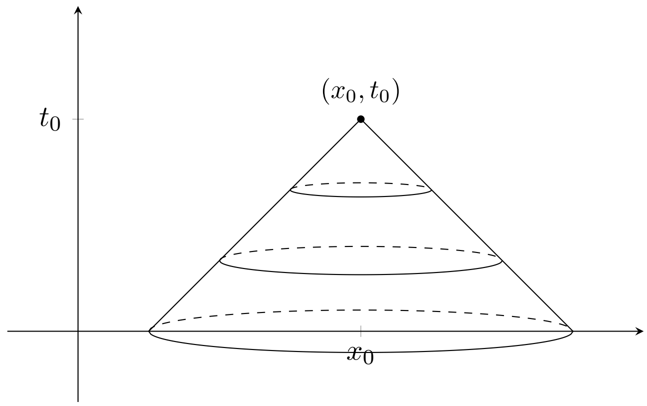
έχει το πολύ μία λύση $u \in C^2(\overline{\Omega_T})$.

Απόδειξη. Έστω $u_1, u_2 \in C^2(\overline{\Omega_T})$ δύο λύσεις του προηγούμενου προβλήματος, τότε η $u = u_1 - u_2 \in C^2(\overline{\Omega_T})$ είναι λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta u = 0, & \text{στο } \Omega_T, \\ u = 0, & \text{στο } \partial_p\Omega_T, \\ \partial_t u = 0, & \text{στο } \Omega \times \{0\}. \end{cases}$$

Αφού η u μηδενίζεται στο κάθετο σύνορο $\partial\Omega \times (0, T)$, η ενέργειά της E_u είναι σταθερή στο $[0, T]$, από το Λήμμα 5.1. Όμως,

$$E_u(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\partial_t u(x,0)|^2 + |\nabla u(x,0)|^2\right)\, dx = 0,$$



Σχήμα 3: Περιοχή εξάρτησης του σημείου (x_0, t_0): ο κώνος C_{x_0,t_0}.

αφού $u = 0$ στο $\Omega \times \{0\}$. Άρα

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\partial_t u(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2\right)\, dx = 0$$

για κάθε $t \in [0, T]$, επομένως $\partial_t u = |\nabla u| \equiv 0$ στο Ω_T. Άρα η u είναι σταθερή στην κατεύθυνση του t, και αφού $u(x, 0) \equiv 0$, θα έχουμε ότι $u \equiv 0$. Επομένως, $u_1 \equiv u_2$ στο Ω_T. □

Στην εξίσωση της θερμότητας, μία διαταραχή σε κάποιο σημείο του χώρου επηρεάζει τη λύση σε οποιδήποτε άλλο σημείο του χώρου, για οποιοδήποτε $t > 0$ (Παρατήρηση 4.12). Αντιθέτως, οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης έχουν *πεπερασμένη* ταχύτητα διάδοσης, και οι τιμές της u σε κάποιο σημείο (x, t) εξαρτώνται μόνο από τις τιμές της $u(y, 0)$ για y στη βάση του κώνου με κορυφή το σημείο (x, t), γωνία κορυφής ίση με $\pi/2$, και βάση μία σφαίρα, δηλαδή το σύνολο

$$\{(y, 0) : |y - x| \le t\}.$$

Έτσι, δεδομένης μίας μπάλας $B_{t_0}(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ για $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και $t_0 > 0$, ορίζουμε τον κώνο με βάση την μπάλα $B_{t_0}(x_0)$ και ύψος ίσο με την ακτίνα t_0, ως

$$C_{x_0,t_0} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) : 0 \le t \le t_0,\ |x - x_0| \le t_0 - t\}. \tag{5.2}$$

Ο κώνος αυτός είναι η *περιοχή εξάρτησης* της λύσης στο σημείο (x_0, t_0) (Σχήμα 3). Ομοίως, δεδομένου ενός σημείου $x_0 \in \mathbb{R}^n$, το σύνολο των σημείων

$$I_{x_0} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) : |x - x_0| \le t\}$$

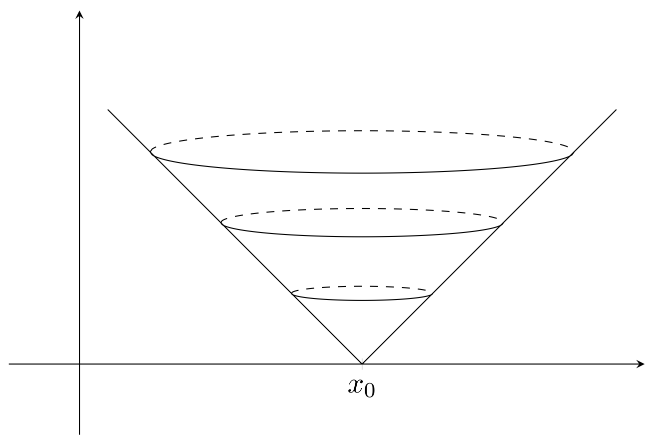
είναι η *περιοχή επιρροής* του σημείου x_0 (Σχήμα 4).

Θα δείξουμε ότι οποιαδήποτε αλλαγή των αρχικών δεδομένων στο σημείο $(x_0, 0)$ θα επηρεάσει τη λύση μόνο μέσα σε αυτόν τον κώνο, και οι τιμές της λύσης θα παραμείνουν αναλλοίωτες εκτός αυτού του κώνου.

Για το επόμενο θεώρημα, θα χρειαστούμε τον κανόνα παραγώγισης του Leibniz.

Λήμμα 5.3. *Έστω $a < b$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ μία συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ένα χωρίο το οποίο περιέχει το σύνολο $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le g(t)\}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, και $f, \partial_t f$ είναι συνεχείς στο Ω. Τότε, για $t \in [a, b]$,*

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^{g(t)} f(x,t)\, dx\right) = f(g(t), t)g'(t) + \int_0^{g(t)} \partial_t f(x,t)\, dx.$$



Σχήμα 4: Περιοχή επιρροής του σημείου $x_0 \in \mathbb{R}^n$: ο κώνος I_{x_0}.

Θεώρημα 5.4. *Έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ μία λύση της κυματικής εξίσωσης. Αν $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$, και $u, \partial_t u \equiv 0$ στην μπάλα $B_{t_0}(x_0)$, τότε*

$$u(y,s) = 0,\ \forall (y,s) \in C_{x_0,t_0}.$$

*Απόδειξη**. Θα θεωρήσουμε την ενέργεια για $t \in [0,t_0]$, αλλά για κάθε χρόνο s, το χωρίο ολοκλήρωσης θα είναι η τομή του υπερεπιπέδου $\{t = s\}$ με τον κώνο C_{x_0,t_0}. Έτσι, θέτουμε

$$e(t) = \frac{1}{2}\int_{B_{t_0-t}(x_0)} \left(|\partial_t u(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2\right)\, dx, \quad t \in [0,t_0].$$

Για να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του Leibniz, γράφουμε το ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες (Πρόταση 3.3), και τότε

$$e(t) = \frac{1}{2}\int_0^{t_0-t}\int_{\partial B_s(x_0)} \left(|\partial_t u(y',t)|^2 + |\nabla u(y',t)|^2\right)\, d\sigma_s(y')\, ds.$$

Από τον κανόνα του Leibniz,

$$\begin{aligned} e'(t) = &-\frac{1}{2}\int_{\partial B_{t-t_0}(x_0)} \left(|\partial_t u(y',t)|^2 + |\nabla u(y',t)|^2\right)\, d\sigma(y) \\ &+ \int_0^{t_0-t}\int_{\partial B_s(x_0)} \left(\partial_t u(y',t)\partial_{tt} u(y',t) + \nabla u(y',t)\nabla \partial_t u(y',t)\right)\, d\sigma_s(y')\, ds = -\frac{1}{2}I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιούμε ξανά τον τύπο των πολικών συντεταγμένων, και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{B_{t_0-t}(x_0)} \partial_t u \cdot \partial_{tt} u + \nabla u \nabla \partial_t u = \int_{B_{t_0-t}(x_0)} \partial_t u(\partial_{tt} u - \Delta u) + \int_{B_{t_0-t}(x_0)} \operatorname{div}(\partial_t u \nabla u) \\ &= \int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \partial_t u \cdot \partial_\nu u\, d\sigma. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$e'(t) = \int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \left(\partial_t u \cdot \partial_\nu u - \frac{1}{2}|\partial_t u|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 \right) d\sigma.$$

Όμως,

$$\partial_t u \cdot \partial_\nu u \leq |\partial_t u||\nabla u| \leq \frac{1}{2}|\partial_t u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2,$$

οπότε $e'(t) \leq 0$. Άρα η e είναι φθίνουσα συνάρτηση. Αφού όμως $e(0) = 0$ και $e(t) \geq 0$ για κάθε $t \in (0, t_0)$, θα έχουμε ότι $e \equiv 0$ στο $(0, t_0)$. Άρα η u είναι ίση με 0 στον κώνο C_{x_0,t_0}. □

5.3 Ο τύπος του d'Alembert: η λύση στο $\mathbb{R}$ και στο $\mathbb{R}^+$

Ο τύπος του d'Alembert μας δίνει έναν τύπο λύσεων της κυματικης εξίσωσης για το πρόβλημα αρχικών τιμών στο $\mathbb{R} \times (0, \infty)$,

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \partial_{xx} u = 0, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g, \ \partial_t u = h, & \text{στο } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases} \tag{5.3}$$

Η κεντρική ιδέα είναι η "παραγοντοποίηση" της εξίσωσης, και η αναγωγή της σε δύο μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Η παρατήρηση είναι η εξής: αφού οι τελεστές ∂_t, ∂_x μετατίθενται (για αρκετά καλές συναρτήσεις u), τότε

$$(\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x) = \partial_t \partial_t - \partial_x \partial_t + \partial_t \partial_x - \partial_x \partial_x = \partial_{tt} - \partial_{xx}.$$

Έτσι, έστω u μία λύση της εξίσωσης. Θέτοντας $v = \partial_t u + \partial_x u$, έχουμε ότι

$$\partial_t v - \partial_x v = \partial_t(\partial_t u + \partial_x u) - \partial_x(\partial_t u + \partial_x u) = \partial_{tt} u - \partial_{xx} u = 0.$$

Επομένως, η v λύνει την εξίσωση της μεταφοράς (2.8) για $n = 1$ και $b = -1$, για την οποία ο τύπος των λύσεων δίνεται από τη σχέση (2.9). Επομένως,

$$v(x, t) = v(x - bt, 0) = v(x + t, 0).$$

Επίσης, από τη σχέση $v = \partial_t u + \partial_x u$ και τις αρχικές συνθήκες για τη u, ο τύπος (2.9) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} u(x, t) &= g(x - t) + \int_0^t v(x + r - t, r)\, dr = g(x - t) + \int_0^t v(x + 2r - t, 0)\, dr \\ &= g(x - t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v(y, 0)\, dy, \end{aligned}$$

με την αλλαγή μεταβλητής $x + 2r - t = y$. Για τις αρχικές τιμές της v, υπολογίζουμε

$$v(x, 0) = \partial_t u(x, 0) + \partial_x u(x, 0) = h(x) + g'(x),$$

επομένως

$$\int_{x-t}^{x+t} v(y, 0)\, dy = \int_{x-t}^{x+t} (h(y) + g'(y))\, dy = g(x + t) - g(x - t) + \int_{x-t}^{x+t} h(y)\, dy.$$

Έτσι, οδηγούμαστε στον *τύπο του d'Alembert* για τη λύση του προβλήματος (5.3),

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(g(x + t) + g(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y)\, dy. \tag{5.4}$$

Υποθέτοντας ότι η u είναι μία αρκετά ομαλή λύση του προβλήματος (5.3), οδηγηθήκαμε στον προηγούμενο τύπο. Για να έχουμε λύση $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, θα κάνουμε τις κατάλληλες υποθέσεις για τις g, h.

Πρόταση 5.5. *Έστω $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$, και ορίζουμε τη συνάρτηση u μέσω του τύπου του d'Alembert* (5.4)*. Τότε $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, και η u είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών* (5.3).

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει από τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων $\partial_{xx}u$ και $\partial_{tt}u$. ☐

Από το Θεώρημα 5.4, βλέπουμε οτι η λύση που δίνεται από τον τύπο του d'Alembert είναι η μοναδική λύση στο πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών (5.3), με τις κατάλληλες συνθήκες ομαλότητας.

Από αυτόν τον τύπο οδηγούμαστε στις εξής παρατηρήσεις.

Παρατήρηση 5.6. Ο τύπος του d'Alembert μας δείχνει ότι η u δεν μπορεί να είναι πιο λεία από τη συνάρτηση g και το ολοκλήρωμα της h. Για παράδειγμα, αν $g \in C^2(\mathbb{R})$ και $h \in C^1(\mathbb{R})$, τότε $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, αλλά η u μπορεί να μην είναι πιο ομαλή από C^2. Έτσι, βλέπουμε μία διαφοροποίηση μεταξύ των λύσεων της εξίσωσης της θερμότητας και της κυματικής εξίσωσης: οι λύσεις της $\partial_t u - \partial_{xx}u = 0$ **γίνονται λείες αμέσως**, ενώ οι λύσεις της $\partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0$ **είναι τόσο ομαλές όσο τα αρχικά δεδομένα.**

Παρατήρηση 5.7. Επιλέγοντας κατάλληλα τις συναρτήσεις g, h μπορούμε να κατασκευάσουμε αντιπαράδειγμα στην αρχή μεγίστου. Έτσι, έστω $g \equiv 0$ και $h(x) = e^{-x^2}$. Από τον τύπο του d'Alembert, η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = 0,\ \partial_t u(x,0) = e^{-x^2}, & \text{στο } \mathbb{R} \end{cases}$$

είναι η συνάρτηση

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} e^{-y^2}\,dy.$$

Έστω $M > 1$. Αν ισχύει η αρχή μεγίστου στο $[-M,M] \times (0,1]$, τότε

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-y^2}\,dy = u(0,1) \le \max_{\partial_p((-M,M)\times(0,1))} u.$$

Όταν $x = 0$, τότε $u(0,t) = 0$. Όταν $x = M$ και $t \in [0,1]$, τότε

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{M-t}^{M+t} e^{-y^2}\,dy \le \frac{1}{2}\int_{M-1}^{M+1} e^{-y^2}\,dy,$$

και όταν $x = -M$ και $t \in [0,1]$,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{-M-t}^{-M+t} e^{-y^2}\,dy \le \frac{1}{2}\int_{-M-1}^{-M+1} e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int_{M-1}^{M+1} e^{-y^2}\,dy,$$

αφού η e^{-y^2} είναι άρτια. Άρα, θα πρέπει

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-y^2}\,dy \le \frac{1}{2}\int_{M-1}^{M+1} e^{-y^2}\,dy \le e^{-(M-1)^2},$$

για κάθε $M > 1$. Όμως, αφήνοντας το $M \to \infty$, το δεξι μέλος συγκλίνει στο 0, το οποίο είναι άτοπο.

Παρατήρηση 5.8. Θέτοντας

$$F(x) = \frac{1}{2}g(x) + \int_0^x h(y)\,dy, \quad G(x) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2}\int_0^x h(y)\,dy,$$

βλέπουμε ότι η λύση του προβλήματος (5.3) γράφεται ως

$$u(x) = F(x+t) + G(x-t).$$

Η συνάρτηση $F(x+t)$ διατηρεί το σχήμα της και κινείται προς τα πίσω, ενώ η συνάρτηση $G(x-t)$ διατηρεί το σχήμα της και κινείται προς τα εμπρός.

Υποθέτοντας ότι $h \equiv 0$, έχουμε ότι $F(x) = G(x) = \frac{1}{2}g(x)$. Έτσι, βλέπουμε ότι η λύση u είναι το άθροισμα δύο συγκεκριμένων λύσεων της κυματικής εξίσωσης: της $u_1(x,t) = \frac{1}{2}g(x+t)$, που είναι το ήμισυ της αρχικής μετατόπισης που ταξιδεύει προς τα αριστερά με ταχύτητα 1, και της $u_2(x,t) = \frac{1}{2}g(x-t)$, που είναι το ήμισυ της αρχικής μετατόπισης που ταξιδεύει προς τα δεξιά με ταχύτητα 1. Διαφορετικά, ξεκινάμε με την αρχική συνθήκη $g(x)$, την μετατοπίζουμε t μονάδες δεξιά και t μονάδες αριστερά, και η λύση u είναι ο μέσος όρος αυτών των μετατοπίσεων.

Γενικότερα, αν F, G είναι C^2 συναρτήσεις, τότε η $u(x) = F(x+t)+G(x-t)$ είναι λύση της κυματικής εξίσωσης $\partial_{xx}u - \partial_{tt}u = 0$.

Παρατήρηση 5.9. Στην περίπτωση που $h \equiv 0$, από τη σχέση

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t))$$

βλέπουμε ότι η τιμή της u στο (x,t) εξαρτάται μόνο από τον μέσο όρο των τιμών της g στα άκρα του διαστήματος $[x-t, x+t]$. Αυτό παύει να ισχύει θεωρώντας και τις αρχικές συνθήκες h, μιας και ολοκληρώνουμε την h σε όλο το διάστημα $[x-t, x+t]$.

Ωστόσο, στις περιττές διαστάσεις $n \geq 3$, αν θεωρήσουμε τη λύση της κυματικής εξίσωσης

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta u = f, & \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g,\ \partial_t u = h, & \text{στο } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases}$$

μπορούμε να αποδείξουμε ότι η τιμή $u(x,t)$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές των g, h στο σύνορο $\partial B(x,t)$: αυτή είναι η αρχή του Huygens. Η αρχή αυτή επισης συνεπάγεται ότι μία στιγμιαία διαταραχή διαδίδεται μόνο στο σύνορο του κώνου επιρροής στις περιττές διαστάσεις $n \geq 3$, κάτι που δεν ισχύει στις άρτιες διαστάσεις.

Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στη γενικότερη εξίσωση

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = f, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g,\ \partial_t u = h, & \text{στο } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases}$$

Για να βρούμε τη λύση αυτής της εξίσωσης, θα θεωρήσουμε τη λύση $\tilde{u}$ που δίνεται από τον τύπο του d'Alembert, και τότε η διαφορά $w = u - \tilde{u}$ λύνει την εξίσωση

$$\begin{cases} \partial_{tt}w - \partial_{xx}w = f, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ w = 0,\ \partial_t w = 0, & \text{στο } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases} \tag{5.5}$$

Για να λύσουμε αυτή την εξίσωση, θέτουμε $v = \partial_t w + \partial_x w$, και τότε $\partial_t v - \partial_x v = f$. Επιπλέον,

$$v(x,0) = \partial_t w(x,0) + \partial_x w(x,0) = 0.$$

Επομένως, από τον τύπο (2.9),

$$v(x,t) = \int_0^t f(x+t-r, r)\, dr.$$

Η w λύνει την εξίσωση της μεταφοράς $\partial_t w + \partial_x w = v$, και $w(x,0) = 0$, οπότε, από τον τύπο (2.9),

$$w(x,t) = \int_0^t v(x+s-t,s)\,ds = \int_0^t \int_0^s f(x+2s-t-r,r)\,drds.$$

Απλοποιούμε αυτόν τον τύπο ως εξής: το χωρίο ολοκλήρωσης είναι το

$$\{(r,s) : 0 \leq s \leq t, 0 \leq r \leq s\} = \{(r,s) : 0 \leq r \leq t,\, r \leq s \leq t\},$$

άρα, από το Θεώρημα Fubini,

$$\int_0^t \int_0^s f(x+2s-t-r,r)\,drds = \int_0^t \int_r^t f(x+2s-t-r,r)\,dsdr.$$

Θέτουμε $r' = t - r$, οπότε

$$\int_0^t \int_r^t f(x+2s-t-r,r)\,dsdr = \int_0^t \int_r^t f(x+2s-2t+r', t-r')\,dsdr'.$$

Για r' σταθερό, θέτουμε $y = x+2s-2t+r'$ στο εσωτερικό ολοκλήρωμα, οπότε $dy = 2ds$, και

$$\int_0^t \int_{t-r'}^t f(x+2s-2t+r', t-r')\,dsdr' = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-r'}^{x+r'} f(y, t-r')\,dydr'.$$

Επομένως, η λύση του προβλήματος (5.5) είναι η

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-r}^{x+r} f(y,t-r)\,dydr.$$

Βλέπουμε ξανά πως εμφανίζεται με φυσιολογικό τρόπο η περιοχή εξάρτησης του σημείου (x,t), δηλαδή ο κώνος $C_{x,t}$, που ορίσαμε στην (5.2): αν $s = t - r$, τότε $ds = -dr$, και το εξωτερικό ολοκλήρωμα πάει από το t στο 0, οπότε

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-r}^{x+r} f(y,t-r)\,dydr = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y,s)\,dyds = \frac{1}{2}\iint_{C_{x,t}} f(y,s)\,dyds.$$

Έτσι, οδηγούμαστε στο εξής γενικότερο αποτέλεσμα.

Πρόταση 5.10. *Έστω $f \in C(\mathbb{R}^2)$ με $\partial_x f \in C(\mathbb{R}^2)$, $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$, και ορίζουμε*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-r}^{x+r} f(y,t-r)\,dydr.$$

Τότε $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, και η u είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για τη μη ομογενή κυματική εξίσωση

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = f, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g,\ \partial_t u = h, & \text{στο } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases}$$

Παρατήρηση 5.11. Ο προηγούμενος τύπος έχει νόημα ακόμη και για συναρτήσεις f, g, h που δεν ικανοποιούν ισχυρές συνθήκες ομαλότητας: για παράδειγμα, μπορούμε απλά να θεωρήσουμε ότι οι f, g, h είναι συνεχείς. Τότε, οδηγούμαστε σε μία λύση u της εξίσωσης η οποία μπορεί να μην ανήκει στον $C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, αλλά θα ικανοποιεί την εξίσωση με μία διαφορετική έννοια, και θα είναι μία *ασθενής λύση*.

Ο τύπος του d'Alembert εφαρμόζεται επίσης για να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0, & \text{στο } (0,\infty)\times(0,\infty) \\ u = g,\, \partial_t u = h, & \text{στο } [0,\infty)\times\{0\}, \\ u(0,t) = 0, & \text{για } t \geq 0. \end{cases}$$

Μετατρέπουμε αρχικά αυτό το πρόβλημα σε ένα πρόβλημα σε όλο το $\mathbb{R}\times(0,\infty)$: θεωρώντας τις περιττές επεκτάσεις $\tilde{g}, \tilde{h}$ των g, h σε όλο το $\mathbb{R}$, αναζητούμε τη λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \partial_{tt}\tilde{u} - \partial_{xx}\tilde{u} = 0, & \text{στο } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ \tilde{u} = \tilde{g},\, \partial_t \tilde{u} = \tilde{h}, & \text{στο } \mathbb{R}\times\{0\}. \end{cases} \tag{5.6}$$

Η λύση του προβλήματος αυτού δίνεται από τον τύπο του d'Alembert, και είναι η

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)\, dy$$

Το $x+t$ ειναι πάντα μη αρνητικό, οπότε $\tilde{g}(x+t) = g(x+t)$. Για το όρισμα $x-t$ διακρίνουμε περιπτώσεις: είτε $x > t$, είτε $x \leq t$, και από το γεγονός ότι η $\tilde{h}$ είναι περιττή, έχουμε ότι

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\, dy, & x \geq t > 0 \\ \frac{1}{2}(g(x+t) - g(t-x)) + \frac{1}{2}\int_{-x+t}^{x+t} h(y)\, dy, & t \geq x \geq 0. \end{cases}$$

Κάτω από κατάλληλες συνθήκες ομαλότητας, έχουμε μοναδικότητα λύσεων στο χωρίο $[0,\infty)\times[0,\infty)$ *(γιατί;)*, οπότε η u που δίνεται από τον προηγούμενο τύπο είναι η μοναδική λύση του προβλήματος (5.6). Επίσης, ο προηγούμενος τύπος μας δείχνει ότι μία αρχική μετατόπιση g χωρίζεται σε δύο μέρη, ένα που κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα 1, και ένα που κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα 1. Το τελευταίο ανακλάται όταν φτάσει στο σταθερό σημείο όπου $x = 0$, και συνεχίζει προς τα δεξιά.

Έτσι, στο χωρίο $0 < t \leq x$, η περιοχή εξάρτησης του σημείου (x,t) είναι ο κώνος $C_{x,t}$, όπως στην (5.2). Όμως, στο χωρίο $0 < x \leq t$, η περιοχή εξάρτησης είναι όπως στο Σχήμα 5.

Παρατήρηση 5.12. Η περιττή επέκταση παραπάνω είναι απαραίτητη για να οδηγηθούμε σε συνάρτηση $\tilde{u}$ η οποία είναι λύση της κυματικής εξίσωσης σε όλο το $\mathbb{R}\times(0,\infty)$. Για παράδειγμα, αν $x = 0$, τότε $\partial_{tt}\tilde{u}(0,t) = 0$ για κάθε $t > 0$ (αφού $u(0,t) = 0$ για κάθε $t > 0$), και η $\partial_{xx}\tilde{u}$ είναι περιττή προς x, επομένως $\partial_{xx}\tilde{u}(x,0) = 0$. Αντιθέτως, αν θεωρήσουμε την άρτια επέκταση $\bar{u}$ της u, τότε ξανά $\partial_{tt}\bar{u}(0,t) = 0$, όμως η $\bar{u}(x,t)$ μπορεί να μην είναι καν παραγωγίσιμη στο $x = 0$, για $t > 0$.

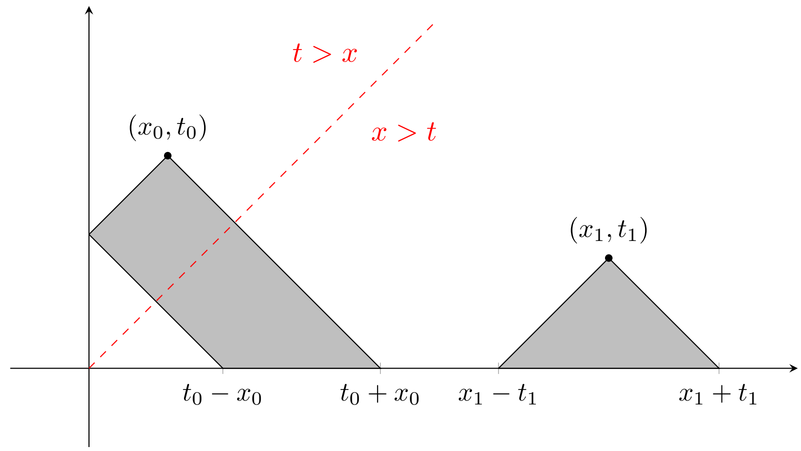
5.4 Χωρισμός μεταβλητών: η λύση σε πεπερασμένο διάστημα

Στρέφουμε την προσοχή μας στο πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0, & \text{στο } (0,\pi)\times(0,\infty) \\ u = g,\, \partial_t u = h, & \text{στο } [0,\pi]\times\{0\}, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & \text{για } t \geq 0. \end{cases}$$

Η λύση αυτού του προβλήματος μπορεί να προσδιοριστεί με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών, όπως και στη περίπτωση της εξίσωσης της θερμότητας. Αρχικά, χωρίζουμε μεταβλητές, και αναζητούμε λύσεις της μορφής $X(x)T(t)$, με $X(0) = X(\pi) = 0$. Τότε, η $X(x)T(t)$ λύνει την κυματική εξίσωση, αν και μόνο αν

$$X''(x)T(t) = X(x)T''(t).$$



Σχήμα 5: Περιοχές εξάρτησης διαφορετικών σημείων στο $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Αν οι X, T δεν είναι ταυτοτικά ίσες με 0, υπάρχουν x_0, t_0 τέτοια ώστε $X(x_0), T(t_0) \neq 0$. Τότε, για $\lambda = \frac{X''(x_0)}{X(x_0)} = \frac{T''(t_0)}{T(t_0)}$,

$$X'' = \lambda X, \quad T'' = \lambda T.$$

Οι λύσεις της $X'' = \lambda X$ με $X(0) = X(\pi) = 0$ είναι μη μηδενικές ταυτοτικά όταν $\lambda = -n^2$, όπου $n \in \mathbb{N}$, και $X(x) = C_1 \sin(nx)$. Τότε, η $T'' = -n^2 T$ έχει λύση την $A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)$, οπότε οι συναρτήσεις

$$(A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)) \sin(nx)$$

είναι λύσεις της κυματικής εξίσωσης.

Επομένως, όπως και στην περίπτωση της εξίσωσης της θερμότητας, αναζητούμε λύση της μορφής

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)) \sin(nx).$$

Για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές A_n, B_n, αρχικά θέτουμε $t = 0$, οπότε

$$g(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx),$$

άρα οι A_n είναι οι συντελεστές της σειράς Fourier ημιτόνων της συνάρτησης g. Αν τώρα οι συναρτήσεις g, h είναι αρκετά “καλές” και μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά με την παράγωγο, έχουμε ότι

$$\partial_t u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-nA_n \sin(nt) + nB_n \cos(nt)) \sin(nx),$$

επομένως

$$h(x) = \partial_t u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin(nx),$$

επομένως, οι συντελεστές nB_n προσδιορίζονται από τη σειρά Fourier ημιτόνων της συνάρτησης h.

Συνοψίζοντας, έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 5.13. *Έστω $g, h : [0, \pi] \to \mathbb{R}$. Αν οι g, h είναι αρκετά ομαλές συναρτήσεις, τότε η λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών*

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0, & \textit{στο } (0,\pi) \times (0,\infty) \\ u = g,\ \partial_t u = h, & \textit{στο } [0,\pi] \times \{0\}, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & \textit{για } t \geq 0. \end{cases}$$

δίνεται από τον τύπο

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)) \sin(nx),$$

όπου οι A_n είναι οι συντελεστές της σειράς Fourier ημιτόνων της g, και οι nB_n είναι οι συντελεστές της σειράς Fourier ημιτόνων της h, δηλαδή

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx)\, dx, \quad B_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} h(x) \sin(nx)\, dx,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατήρηση 5.14. Γενικά, σε κάθε τύπο προβλήματος (πχ συνοριακές συνθήκες Dirichlet, συνοριακές συνθήκες Neumann, κτλ) η διαδικασία χωρισμού μεταβλητών μας οδηγεί στην αντίστοιχη εξίσωση με τις παραμέτρους λ, όπου λαμβάνουμε τις συναρτήσεις που αντιστοιχούν στις $\sin(nx)$.

Παρατήρηση 5.15. Αν κάποιο από τα $g(0), g(\pi), h(0), h(\pi)$ είναι διάφορα του 0, τότε οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες είναι ασύμβατες μεταξύ τους και η λύση του προβλήματος δεν μπορεί να ανήκει στον $C^2([0,\pi] \times [0,\infty))$, αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προηγούμενη διαδικασία για να καταλήξουμε σε μία λύση. Τότε η u δεν θα είναι C^1 μέχρι το σύνορο, και σε αυτήν την περίπτωση δεν έχουμε αποδείξει μοναδικότητα λύσεων, οπότε λέμε ότι θα έχουμε βρει **μία** λύση του προβλήματος.

Παράδειγμα 5.16. Θα προσδιορίσουμε μία λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0, & \text{στο } (0,\pi) \times (0,\infty) \\ u(x) = x^2 - \pi x,\ \partial_t u(x) = e^x, & \text{για } x \in [0,\pi] \times \{0\}, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & \text{για } t \geq 0. \end{cases}$$

Μία λύση του προβλήματος αυτού γράφεται ως

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)) \sin(nx),$$

όπου οι A_n είναι οι συντελεστές της σειράς Fourier ημιτόνων της $g(x) = x^2 - \pi x$, και οι nB_n είναι οι συντελεστές της σειράς Fourier ημιτόνων της e^x.

Γράφουμε τη συνάρτηση $x^2 - \pi x$ σαν σειρά ημιτόνων, θεωρώντας την περιττή της επέκταση στο $[-\pi, \pi]$: από τις σχέσεις (4.13) και (4.15), έχουμε ότι

$$x^2 - \pi x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^n}{\pi n^3} - \frac{4}{\pi n^3} \right) \sin(nx).$$

Άρα $A_n = -\frac{8}{\pi n^3}$ αν n περιττός, και $A_n = 0$ αν n άρτιος. Για τη σειρά Fourier ημιτόνων της e^x για $x \in [0, \pi]$: θεωρώντας την περιττή επέκταση της e^x στο $[-\pi, \pi]$, για $n \in \mathbb{N}$, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^x \sin(nx)\,dx &= -\frac{1}{n}\int_0^\pi e^x(\cos(nx))'\,dx = -\frac{1}{n}(e^\pi\cos(n\pi) - 1) + \frac{1}{n}\int_0^\pi (e^x)'\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{n}(1-(-1)^n e^\pi) + \frac{1}{n^2}\int_0^\pi e^x(\sin(nx))'\,dx \\
&= \frac{1}{n}(1-(-1)^n e^\pi) - \frac{1}{n^2}\int_0^\pi e^x \sin(nx)\,dx,
\end{aligned}$$

επομένως

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\int_0^\pi e^x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{n}(1-(-1)^n e^\pi),$$

άρα

$$B_n = \frac{2}{\pi n^2}\int_0^\pi e^x \sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi(n^2+1)}(1-(-1)^n e^\pi).$$

Άρα μία λύση του προβλήματος είναι η

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty \left(\left(\frac{4(-1)^n}{\pi n^3} - \frac{4}{\pi n^3}\right)\cos(nt) + \frac{2}{\pi(n^2+1)}(1-(-1)^n e^\pi)\sin(nt)\right)\sin(nx).$$

5.5 Προβλήματα

1. Έστω $u \in C^2((0,\infty)\times(0,\infty)) \cap C^1([0,\infty)\times[0,\infty))$ μία λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0, & \text{στο } [0,\infty)\times(0,\infty), \\ u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0, & \text{για } x \geq 0, \\ u(0,t) = 0, & \text{για } t \geq 0. \end{cases}$$

   i) Να αποδειχθεί ότι, για κάθε $M > 0$, $u(M,t) = 0$ για κάθε $t \in [0, M]$.

   ii) Να αποδειχθεί ότι $u \equiv 0$ στο $[0,\infty)\times[0,\infty)$.

2. Έστω u μία λεία λύση της κυματικής εξίσωσης $\partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0$ στο $\mathbb{R}\times(0,\infty)$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$e(x,t) = \frac{1}{2}\left((\partial_t u(x,t))^2 + (\partial_x u(x,t)^2)\right), \quad p(x,t) = \partial_t u(x,t)\partial_x u(x,t).$$

   i) Να αποδειχθεί ότι $\partial_t e = \partial_x p$ και $\partial_t p = \partial_x e$.

   ii) Να αποδειχθεί ότι οι e, p είναι λύσεις της κυματικής εξίσωσης.

3. Έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ μία λύση της κυματικής εξίσωσης $\partial_{tt}u - \partial_{xx} = 0$.

   i) Με την αλλαγή μεταβλητής $\xi = x+t, \eta = x-t$, θέτουμε $u(x,t) = \tilde{u}(x+t, x-t) = \tilde{u}(\xi,\eta)$. Να αποδειχθεί ότι $\partial_{\xi\eta}\tilde{u} = 0$ στο $\mathbb{R}^2$.

   ii) Να αποδειχθεί ότι η γενική λύση της $\partial_{\xi\eta}\tilde{u} = 0$ είναι η $\tilde{u} = F(\xi) + G(\eta)$, για οποιεσδήποτε ομαλές συναρτήσεις F, G.

   iii) Να αποδειχθεί ότι η γενική λύση για τη u είναι η $u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$.

iv) Εφαρμόζοντας τα παραπάνω στο χωρίο $\mathbb{R} \times (0,\infty)$, να αποδειχθεί ο τύπος του d'Alembert (5.4).

4. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ομαλό χωρίο, και $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ μία λύση της κυματικής εξίσωσης $\partial_{tt}u - \Delta u = 0$ στο $\Omega \times (0,\infty)$, με συνοριακές συνθήκες Neumann
$$\partial_{\nu(x)}u(x,t) = 0$$
για $x \in \partial\Omega$. Ορίζουμε την ποσότητα
$$m(t) = \int_\Omega \partial_t u(x,t)\,dx.$$
Να αποδειχθεί ότι η m είναι σταθερή συνάρτηση στο $[0,\infty)$.

5. Έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ μία λύση της κυματικής εξίσωσης.
   i) Να αποδειχθεί ότι, για κάθε $\lambda > 0$, η συνάρτηση $u_\lambda(x,t) = u(\lambda x, \lambda t)$ είναι λύση της κυματικής εξίσωσης στο $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.
   ii) Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ιδιότητα, να αποδειχθεί ότι η $v(x,t) = x\nabla u(x,t) + t\partial_t u(x,t)$ είναι επίσης λύση της κυματικής εξίσωσης στο $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

6. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών
$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = e^x,\ \partial_t u(x,0) = \sin x, & \text{για } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών
$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0, & \text{στο } (0,\infty) \times (0,\infty) \\ u(x,0) = \ln(1+x),\ \partial_t u(x,0) = x, & \text{για } x \geq 0, \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$
και του προβλήματος αρχικών τιμών
$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = \cos x, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \sin x,\ \partial_t u(x,0) = 1 + x, & \text{για } x \geq 0, \end{cases}$$

7. Έστω u μία λύση της κυματικής εξίσωσης $\partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0$ στο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι, για κάθε $x, t, h, k \in \mathbb{R}$,
$$u(x+h, t+k) + u(x-h, t-k) = u(x+k, t+h) + u(x-k, t-h).$$
Να σχεδιαστούν τα σημεία $(x+h, t+k), (x-h, t-k), (x+k, t+h), (x-k, t-h)$ στο επίπεδο.

8. Να βρεθεί ένας τύπος για τη λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών
$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = f, & \text{στο } (0,\infty) \times (0,\infty) \\ u = g,\ \partial_t u = h, & \text{στο } [0,\infty) \times \{0\}, \\ u(0,t) = 0, & \text{για } t \geq 0. \end{cases}$$
θεωρώντας τις περιττές επεκτάσεις των f, g, h.

9. Έστω $g \in C^2(\mathbb{R})$ και $h \in C^1(\mathbb{R})$ περιττές συναρτήσεις. Δείξτε ότι η λύση του προβλήματος
$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x),\ \partial_t u(x,0) = h(x), & \text{για } x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$
είναι περιττή συνάρτηση του x, για κάθε $t \geq 0$ σταθερό.

5.6 Επιπλέον προβλήματα*

1. Έστω $\varepsilon > 0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει λύση $u : [-1,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ της κυματικής εξίσωσης στο $(-1,1) \times (0,1)$, τέτοια ώστε
$$u(0,\varepsilon) > \max_{\partial_p((-1,1)\times(0,1))} u.$$

2. Έστω $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ μία λύση του προβλήματος αρχικών τιμών
$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = f, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x),\ \partial_t u(x,0) = h(x), & \text{για } x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$
Έστω $x_0 \in \mathbb{R}, t_0 > 0$, και θεωρούμε την περιοχή εξάρτησης
$$C_{x_0,t_0} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) : 0 \leq t \leq t_0,\ |x - x_0| \leq t_0 - t\}.$$
όπως στην (5.2).
   i) Θεωρώντας το διανυσματικό πεδίο $X = (-\partial_x u, \partial_t u)$, να αποδειχθεί ότι
   $$\int_{\partial C_{x_0,t_0}} (-\partial_x u, \partial_t u) \cdot \nu \, d\sigma = \int_{C_{x_0,t_0}} f.$$
   ii) Το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα τριών ολοκληρωμάτων: ένα στη βάση του τριγώνου γ_1, ένα στην δεξιά πλευρά γ_2, και ένα στην αριστερή πλευρά γ_3, με τη θετική φορά. Να αποδειχθεί ότι
   $$\int_{\gamma_1} (-\partial_x u, \partial_t u) \cdot \nu \, d\sigma = -\int_{x-t}^{x+t} h,$$
   και
   $$\int_{\gamma_2} (-\partial_x u, \partial_t u) \cdot \nu \, d\sigma = u(x,t) - u(x+t,0), \quad \int_{\gamma_3} (-\partial_x u, \partial_t u) \cdot \nu \, d\sigma = u(x,t) - u(x-t,0).$$
   iii) Συμπεράνετε ότι
   $$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\, dy + \frac{1}{2}\iint_{C_{x_0,t_0}} f,$$
   όπως στην Πρόταση 5.10.

3. (Ισομοιρασμός της ενέργειας) Έστω $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λείες, με συμπαγή φορέα. Ορίζουμε την κινητική ενέργεια $k(t)$ και τη δυναμική ενέργεια $p(t)$ από τις σχέσεις
$$k(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_t u(x,t))^2\, dx, \quad p(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(x,t))^2\, dx.$$
   i) Να αποδειχθεί ότι, για κάθε $t > 0$, υπάρχει $M_t > 0$ τέτοιο ώστε $\partial_t u(x,t) = \partial_x u(x,t) = 0$ για καθε $x > M_t$.
   ii) Να αποδειχθεί ότι η $k + p$ είναι σταθερή συνάρτηση στο $(0,\infty)$.
   iii) Να αποδειχθεί οτι, για μεγάλα $t > 0$, $k(t) = p(t)$.

4. Στόχος αυτής της άσκησης είναι η εύρεση του τύπου λύσεων για την κυματική εξίσωση στο $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$. Έστω g, h λείες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^3$, και u μία λεία λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \Delta u = 0, & \text{στο } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x),\ \partial_t u(x,0) = h(x), & \text{για } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

i) Για $x \in \mathbb{R}^3$, σταθερό, θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$U_x(r,t) = \frac{1}{\sigma(B_r)} \int_{\partial B_r(x)} u(y,t)\, d\sigma(y), \quad G_x(r,t) = \frac{1}{\sigma(B_r)} \int_{\partial B_r(x)} g(y)\, d\sigma(y),$$
$$H_x(r,t) = \frac{1}{\sigma(B_r)} \int_{\partial B_r(x)} h(y)\, d\sigma(y),$$

για $t, r > 0$. Δείξτε ότι η U_x είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για την εξίσωση Euler-Poisson-Darboux:

$$\begin{cases} \partial_{tt} U_x - \partial_{rr} U_x - \frac{2}{r} \partial_r U_x = 0, & \text{στο } (0,\infty) \times (0,\infty) \\ U_x = G_x,\ \partial_t U_x = H_x, & \text{στο } (0,\infty) \times \{0\}. \end{cases}$$

ii) Αν $\tilde{U}_x = rU_x$, $\tilde{G}_x = rG_x$ και $\tilde{H}_x = rH_x$, δείξτε ότι η $\tilde{U}_x$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \partial_{tt} \tilde{U}_x - \partial_{rr} \tilde{U}_x = 0, & \text{στο } (0,\infty) \times (0,\infty) \\ \tilde{U}_x = \tilde{G}_x,\ \partial_t \tilde{U}_x = \tilde{H}_x, & \text{στο } (0,\infty) \times \{0\} \\ \tilde{U}_x(0,t) = 0, & \text{για } t \geq 0. \end{cases}$$

Συμπεράνετε από τον τύπο του d'Alembert ότι, αν $0 \leq r \leq t$,

$$\tilde{U}_x(r,t) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{G}_x(r+t) - \tilde{G}_x(t-r)\Big) + \frac{1}{2} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}_x(y)\, dy.$$

iii) Δείξτε ότι

$$u(x,t) = \lim_{r \to 0^+} \frac{\tilde{U}_x(t,r)}{r} = \tilde{G}'_x(t) + \tilde{H}_x(t).$$

iv) Συμπεράνετε τον *τύπο του Kirchhoff*: για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$ και $t > 0$,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sigma(B_t)} \int_{\partial B_x(t)} \big(th(y) + g(y) + \nabla g(y) \cdot (y - x)\big)\, d\sigma(y).$$

Βιβλιογραφία

[1] Γεώργιος Δ. Ακρίβης, Νικόλαος Δ. Αλικάκος, *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις.* Σύγχρονη Εκδοτική, 2012.

[2] Στέφανος Τραχανάς, *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις. Σειρές Fourier και προβλήματα συνοριακών τιμών.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2001.

[3] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[4] Walter A. Strauss, *Partial differential equations. An introduction.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.